



Feuille d'exercices

Calcul littéral : Identités remarquables

Exercices des parcours minimum et recommandé (numérotation du sujet complet)

Difficulté : ★☆☆☆ très facile ★★☆☆ facile ★★★☆ moyen ★★★★ difficile

Parcours : 🏹 minimum 🎯 recommandé 🏆 perfectionnement

Repères progressifs : à compléter au fil du chapitre.

Nature d'une expression (partie 1 du cours). L'opération principale porte sur l'écriture entière. Développer transforme un produit en somme ; factoriser transforme une somme en produit. Un carré se lit $E^2 = E \times E$.

Acquis de 4^e. $k(a + b) = ka + kb$ et $ka + kb = k(a + b)$.

Double distributivité (partie 2) : $(a + b)(c + d) = \dots\dots\dots$

Identités remarquables (partie 3) :

$$(a + b)^2 = \dots\dots\dots \quad (a - b)^2 = \dots\dots\dots \quad (a + b)(a - b) = \dots\dots\dots$$

Écrire les entiers (parties 1 et 5). Pair : Impair : Trois entiers consécutifs :

Carnet des pièges, à compléter au fil du chapitre :

- Un signe ou une multiplication à l'intérieur ne détermine pas la nature : on repère
- L'opposé d'une somme ou d'une différence change
- La conjecture issue du tableau (activité du cours) et ce qui l'a démontrée :
- Quand un coefficient est au carré, ce qui doit être élevé au carré :
- Pour factoriser, la première structure à rechercher :
- Logique : des exemples ne démontrent pas une affirmation générale ; un seul contre-exemple suffit à la réfuter.

Méthode cumulative, photographier la structure :

1. Lire. Quelle opération porte sur l'expression entière ? Quelle structure veut-on obtenir ?
2. Développer. Écrire tous les produits avec leurs signes avant de réduire.
3. Reconnaître. Nommer la structure avant d'appliquer une identité remarquable.
4. Factoriser. Chercher d'abord un facteur commun, puis seulement une autre structure.
5. Toujours contrôler. Refaire la transformation en sens inverse ou substituer une valeur simple.

1. Nature d'une expression et développement

Réactivation express (chapitres précédents)

★☆☆☆

- a) Rendre irréductible $\frac{84}{126}$ (décomposition en facteurs premiers).
- b) Écrire sous la forme $2^n : 2^3 \times 2^5 ; \frac{2^9}{2^4}$.
- c) Donner la notation scientifique de 0,0072.
- d) Calculer $\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$ sous forme irréductible.
- e) Deux triangles semblables ont des côtés de rapport 2 : que dire du rapport de leurs aires ?

1.1. Somme ou produit ? Le tri

★☆☆☆

Pour chaque expression, dire si c'est une somme ou un produit (entourer l'opération principale, celle qui porte sur l'écriture entière), puis nommer ses termes ou ses facteurs.

- | | |
|---------------------|--------------------------|
| a) $3x + 2$ | f) $(2x - 3)^2$ |
| b) $5(x + 4)$ | g) $3(x + 1) + 2$ |
| c) $(x + 1)(x - 3)$ | h) $x(x + 1) + 3(x + 2)$ |
| d) $x^2 - 9$ | i) $2x^2$ |
| e) $7 - 5x$ | j) $(x + 5)(x - 5)$ |

1.2. Distributivité simple et opposé

★☆☆☆

- a) Développer et réduire : $3(2x + 5) ; -4x(6 - 3x) ; 7(3 - x) + 2x$.
- b) Donner l'opposé de chaque expression : $5 - 4x ; 3x - 7 ; -2x + 9 ; x^2 - 6x + 1$.
- c) Réduire : $5x + 3 - 2x + 8 ; 4x^2 - x + 3x^2 + 7x - 9$.

1.3. Double distributivité : les gammes

★★☆☆

Développer et réduire.

- | | |
|-----------------------|---------------------------|
| a) $(x + 3)(x + 5)$ | e) $-4x(6 - 3x) - 8x^2$ |
| b) $(x - 3)(2x + 5)$ | f) $3(2x + 1) - (6 - x)$ |
| c) $(3x + 1)(2x - 7)$ | g) $(-3x + 5)(2x - 3)$ |
| d) $(2x - 3)(5x + 7)$ | h) $(x + 6)(x - 2) - x^2$ |

1.4. Expressions mixtes à réduire

★★★☆☆

Développer et réduire chaque expression.

- a) $A = 5(4x - 7) + (x + 9)(5x - 6)$
- b) $B = (x - 5)(x + 7) + (2x - 4)(3x - 1)$
- c) $C = 3x(x - 3) - (x + 7)(4x - 2)$
- d) $D = (y - 9)(3y + 2) - (2y - 7)(4y - 5)$

1.5. Démontrer la double distributivité ☹

★★★☆☆

On veut démontrer que, pour tous nombres réels a, b, c, d : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$, en n'utilisant que la distributivité simple $k(c + d) = kc + kd$.

- On pose $k = a + b$. Écrire $(a + b)(c + d)$ à l'aide de k , et développer avec la distributivité simple.
- Dans le résultat, remplacer k par $a + b$, et développer chacun des deux produits obtenus (distributivité simple, en distribuant cette fois par la droite : $(a + b)c = ac + bc$).
- Recoller les quatre termes, puis les remettre dans l'ordre $ac + ad + bc + bd$ en nommant la propriété utilisée. Combien de fois a-t-on appliqué la distributivité simple en tout ?
- Pour aller au bout : adapter la démonstration pour obtenir la formule de $(a + b)(c - d)$.

2. Identités remarquables : développer

2.1. Les gammes ♪

★★☆☆☆

Développer et réduire à l'aide de l'identité adaptée, en écrivant l'étape « formule » avant le résultat.

- | | | |
|-----------------|---------------------|---------------------|
| a) $(x + 3)^2$ | d) $(y - 6)^2$ | g) $(t - 5)(t + 5)$ |
| b) $(x + 10)^2$ | e) $(a - 7)(a + 7)$ | h) $(n + 1)^2$ |
| c) $(x - 4)^2$ | f) $(x + 8)(x - 8)$ | i) $(4 - a)^2$ |

2.2. Avec des coefficients ☹

★★☆☆☆

Développer et réduire.

- | | |
|-----------------|-----------------------|
| a) $(2x + 1)^2$ | e) $(3x - 2)(3x + 2)$ |
| b) $(3x + 7)^2$ | f) $(5x + 7)(5x - 7)$ |
| c) $(3 - 2x)^2$ | g) $(y - 2,5)^2$ |
| d) $(4x - 3)^2$ | h) $(1 - a)(1 + a)$ |

2.3. Le sens inverse : reconnaître une forme développée ☹

★★★☆☆

- a) Chacune des expressions suivantes est le développement d'une identité remarquable. Retrouver l'expression de départ :

$$x^2 + 10x + 25; \quad x^2 - 6x + 9; \quad 4x^2 - 12x + 9; \quad 4y^2 + 40y + 100; \quad 49t^2 - 14t + 1.$$

- b) Nombre manquant. Déterminer le nombre manquant pour que l'expression soit le carré d'une somme ou d'une différence :

$$x^2 + \dots x + 9; \quad 4x^2 - 4x + \dots; \quad \dots x^2 + 100x + 100.$$

- c) Pour la première expression du b), combien y a-t-il de réponses possibles ?

2.4. Vrai ou faux ? ☹

★★☆☆☆

Pour chaque affirmation : dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier. Si elle est vraie : un calcul pour une égalité entre nombres donnés, une identité ou un calcul littéral pour une affirmation « pour tout », un exemple pour une affirmation « il existe ». Si elle est fausse : un contre-exemple chiffré.

- Pour tout nombre a : $(2a + 3)^2 = 4a^2 + 9$.
- Le carré de la différence de deux nombres est égal à la différence des carrés de ces deux nombres.
- $26^2 - 25^2 = 26 + 25$.
- Pour tout nombre a : $(a + 5)^2 - (a - 5)^2 = 20a$.
- Pour tout nombre x , $x^2 - 12x + 9$ est le carré d'un nombre.
- Pour tous nombres a et b : $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.
- Il existe des nombres a et b pour lesquels $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

3. Factoriser

3.1. Facteur commun

★★☆☆

Souligner un facteur commun, puis factoriser en extrayant tous les facteurs communs encore visibles.

a) $5a + 15b$

c) $7x - 35$

e) $8 + 2x$

b) $12x^2 - 15x$

d) $x^2 - 5x$

f) $30a + 36a^2$

3.2. Facteur commun composé

★★★★

Le facteur commun est une parenthèse entière. Factoriser, puis réduire la seconde parenthèse.

a) $A = (x - 2)(x + 3) + (x - 2)(x + 6)$

b) $B = (x + 5)(4x - 2) - (x + 5)(9x + 1)$

c) $C = (3x + 8)^2 - (6x - 7)(3x + 8)$

d) $D = (4x + 5)^2 - 5(4x + 5)$

3.3. Factoriser par identité : les pièges

★★★★

Reconnaître la structure (photographier : combien de termes ? des carrés ? le double produit ?), puis factoriser si c'est possible avec les outils du chapitre. Dans deux cas, aucune des trois identités ne permet ici de conclure : lesquels ? Pour chacun, expliquer précisément ce qui bloque et dire si ce blocage est provisoire ou non dans le cadre du chapitre.

a) $x^2 - 64$

g) $36z^2 - 1$

b) $49x^2 - 16$

h) $x^2 - 13$

c) $x^2 + 2x + 1$

i) $16x^2 - 144$

d) $9y^2 - 24y + 16$

j) $x^2 + 81$

e) $25 - 100t^2$

k) $4x^2 - 49$

f) $64 - 80x + 25x^2$

l) $x^2 - 20x + 100$

3.4. Différences de carrés emboîtées

★★★★

Ici, a ou b est un bloc entre parenthèses. Factoriser, puis réduire chaque parenthèse (et mettre en facteur un nombre si possible).

a) $A = (x + 1)^2 - 36$

b) $B = 25 - (2x + 3)^2$

c) $C = 4x^2 - (x - 5)^2$

d) $D = (8x - 4)^2 - 9x^2$

3.5. Le tableau va-et-vient

★★☆☆

Recopier et compléter le tableau (chaque ligne utilise une identité remarquable, dans un sens ou dans l'autre).

Forme factorisée	Forme développée
$(x + 30)^2$	
	$x^2 - 12x + 36$
	$25y^2 + 50y + 25$
$(t - 8)(t + 8)$	
	$x^2 - 81$
$(7t - 5)^2$	

3.6. La copie de Louise (chasse à l'erreur) 🎯

★★☆☆

Pour factoriser $E = 4x^2 - 4x + 1$, Louise a rendu la copie suivante :

« Je vois le facteur commun $4x$, donc $E = 4x(x - 1)$. C'est factorisé, j'ai fini ! »

- Développer $4x(x - 1)$. Obtient-on E ? Quel terme de E a disparu dans la copie de Louise ?
- Contrôler autrement, sans développer : calculer E puis $4x(x - 1)$ pour $x = 1$. Conclure.
- Donner la factorisation correcte de E , et la vérifier en développant.
- Expliquer la différence entre les deux contrôles précédents : que permet de conclure le test en $x = 1$? Qu'établit le redéveloppement de $(2x - 1)^2$?

4. Le calcul malin (la récompense)

Le principe. Réécrire sans changer la valeur, puis choisir la voie qui réduit vraiment les opérations restantes : identité remarquable ou distributivité. Un nombre « rond » est un indice, pas une règle. Exemples : $61^2 = (60 + 1)^2$; $52 \times 48 = (50 + 2)(50 - 2)$; $62^2 - 58^2 = (62 + 58)(62 - 58)$. Aucune multiplication posée n'est autorisée dans cette section : c'est le jeu.

4.1. Les carrés voisins des nombres ronds 🏹

★★☆☆

Calculer de tête, en écrivant l'identité utilisée, le calcul de chaque terme et le résultat, puis contrôler.

- | | | | |
|------------|--------------------|-----------|-------------|
| a) 101^2 | c) 102×98 | e) 21^2 | g) 35^2 |
| b) 99^2 | d) 103×97 | f) 19^2 | h) 1001^2 |

4.2. En une seule multiplication 🎯

★★☆☆

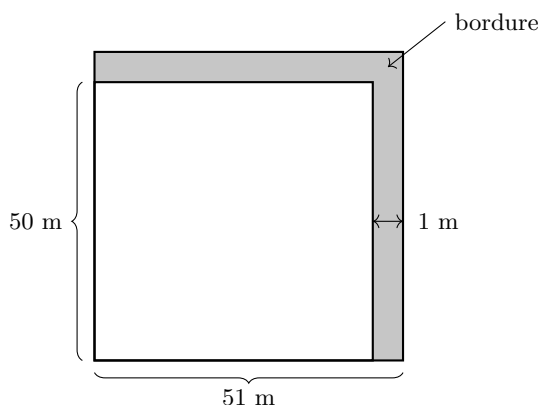
Calculer mentalement, en indiquant l'identité utilisée.

- | | | |
|-------------------|--------------------|--|
| a) $73^2 - 67^2$ | c) $43^2 - 42^2$ | e) $45^2 + 2 \times 45 \times 5 + 5^2$ |
| b) $101^2 - 99^2$ | d) $8,5^2 - 1,5^2$ | f) $14^2 - 2 \times 14 \times 4 + 4^2$ |

4.3. L'aire entre deux carrés 🎯

★★☆☆

Un carré de 51 m de côté contient un carré de 50 m de côté (figure ci-dessous).



La figure n'est pas à l'échelle.

- Calculer mentalement l'aire de la bordure grise (la surface entre les deux carrés).
- Avant de valider : cette aire est-elle vraisemblable ? La bordure grise est un L formé de deux bandes de 1 m de large, le long de deux côtés adjacents seulement ; estimer son aire sans calcul exact, puis comparer avec le résultat du a).
- Généraliser : pour tout réel $n > 0$, montrer que l'aire entre un carré de côté $n + 1$ et un carré de côté n , placés comme sur la figure, vaut $2n + 1$. Où a-t-on déjà rencontré cette expression dans le chapitre ?

4.4. Champions : la cour des grands

★★★☆☆

De tête, en choisissant et en justifiant la transformation la plus économique : identité remarquable ou distributivité.

- a) 1005^2
- b) $10,1 \times 9,9$
- c) 38×998
- d) $2026^2 - 2025^2 - 4051$

4.5. Contrôler sans calculer

★★★☆☆

Les affirmations suivantes sont proposées comme vraies. Lorsqu'une lettre apparaît, l'égalité est prétendue vraie pour tout réel. Réfuter chaque affirmation en une phrase, sans développement complet ni opération posée (structure, signe, chiffre des unités, valeur test...). Dans les items avec une lettre, un contre-exemple réfute « pour tout » sans signifier que l'égalité échoue pour chaque valeur.

- a) « $(x + 10)^2 = x^2 + 100$. »
- b) « $25 - 100t^2 = (5 - 10t)^2$. »
- c) « $47 \times 53 = 2500$. »
- d) « $(3x)^2 = 3x^2$. »

Repère « Justifier et raisonner ». Vrai/faux : 2.4 ; copie erronée : 3.6 ; cohérence sans calcul : 4.5 ; rédaction et démonstration autonomes : 5.1 à 5.4. Commencer par dire ce que l'exercice demande (réfuter, corriger, démontrer) avant de calculer.

5. Programmes de calcul et démonstrations

5.1. Le programme d'Arthur : deux essais ne suffisent pas pour conclure pour tout x

★★★☆☆

On considère le programme de calcul ci-dessous.

Programme de calcul

- Choisir un nombre de départ.
- Multiplier ce nombre par (-2) .
- Ajouter 5 au produit.
- Multiplier le résultat par 5.
- Écrire le résultat obtenu.

- a) Vérifier que, lorsque le nombre de départ est 2, on obtient 5.
- b) Lorsque le nombre de départ est 3, quel résultat obtient-on ?
- c) Quel nombre faut-il choisir au départ pour que le résultat soit 0 ?
- d) Arthur prétend que, pour n'importe quel nombre de départ x , l'expression $(x - 5)^2 - x^2$ donne le résultat du programme. Peut-on trancher en testant $x = 2$ et $x = 3$? A-t-il raison ? Démontrer.

Modifier, créer, résoudre

1. Modifier et prévoir. Dans le programme d'Arthur, remplacer la dernière multiplication par 5 par une multiplication par 3. Sans tout recalculer, prévoir si le nombre de départ qui donne 0 change, puis vérifier littéralement.
2. Créer sous contrainte. Inventer un programme d'au moins trois étapes dont le résultat, pour un nombre de départ x , se réduit exactement à $6x - 12$. Les consignes doivent être exécutables dans un ordre unique.
3. Résoudre et vérifier. Traduire le programme en une expression, prouver qu'elle vaut $6x - 12$ et la vérifier avec deux nombres.

5.2. Deux programmes, un même résultat ?

★★★☆☆

Programme A

- Choisir un nombre.
- Soustraire 1.
- Élever au carré.
- Soustraire 1.

Programme B

- Choisir un nombre.
- Soustraire 2.
- Multiplier par le nombre choisi.

- a) Appliquer les deux programmes aux nombres 3, 10 et -5 . Que constate-t-on ? Émettre une conjecture.
- b) Démontrer la conjecture (exprimer le résultat de chaque programme pour un nombre de départ x).

5.3. Type Brevet : le programme au carré ☉

★★★☆☆

On considère le programme : choisir un nombre de départ ; ajouter 1 ; calculer le carré du résultat ; lui soustraire le carré du nombre de départ ; écrire le résultat final.

- Vérifier que lorsque le nombre de départ est 1, on obtient 3.
- Lorsque le nombre de départ est 2, quel résultat obtient-on ?
- Le nombre de départ étant x , exprimer le résultat final en fonction de x , puis développer et réduire $P = (x+1)^2 - x^2$. Utiliser ici la double distributivité (une seconde méthode consiste à factoriser P comme une différence de deux carrés).
- Quel nombre de départ faut-il choisir pour obtenir 15 ?

5.4. Conjecture au tableur, preuve littérale : trois entiers consécutifs ☉

★★★☆☆

On s'intéresse à la somme de trois entiers consécutifs (par exemple $7 + 8 + 9$).

- Calculer $(-8) + (-7) + (-6)$, puis $7 + 8 + 9$, puis $199 + 200 + 201$. Diviser chaque résultat par 3. Que remarque-t-on ?
- On prépare la feuille de calcul ci-dessous. Sélectionner **A2:A3** et prolonger cette série jusqu'à **A201**. Quelles formules faut-il saisir en **B2**, **C2** et **D2**, puis recopier jusqu'à la ligne 201 ?

	A	B	C	D
1	1 ^{er} entier	2 ^e entier	3 ^e entier	somme
2	-100			
3	-99			

- Formuler la conjecture. Qu'établissent exactement les 200 lignes affichées ? Pourquoi ne suffisent-elles pas à démontrer un énoncé portant sur tous les entiers ?
- Démontrer la conjecture. Choisir une lettre pour l'un des trois nombres, préciser lequel elle désigne, puis rédiger avec un entier quelconque, une chaîne d'égalités justifiées et une conclusion en « pour tout entier ».
- Montrer de plus que la somme est toujours le triple de l'un des trois entiers. Lequel ?
- La somme de quatre entiers consécutifs est-elle toujours un multiple de 4 ? Démontrer, ou réfuter par un contre-exemple.

Bloc transversal : Justifier et raisonner ☉

★★★☆☆

- Repérer l'erreur. Un élève développe et réduit $E = (2x+3)^2 - (x-1)(2x+3)$:

$$E = 4x^2 + 9 - (2x^2 + 3x - 2x - 3) = 4x^2 + 9 - 2x^2 - x - 3 = 2x^2 - x + 6.$$

Localiser précisément la première égalité fautive, nommer l'erreur commise, puis donner la forme réduite correcte de E . Vérifier enfin le résultat en factorisant E par $(2x+3)$.

- Contrôler la cohérence sans calcul. Chaque égalité est prétendue vraie pour tout réel x . Réfuter cette affirmation en une ligne, à l'aide d'un contre-exemple ou d'une identité. Une égalité peut rester vraie pour certaines valeurs de x .

- $(x+5)^2 = x^2 + 25$
- $(5x)^2 = 5x^2$
- $x^2 - 64 = (x-8)^2$
- $x^2 + 16 = (x+4)^2$

- Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

- « $3x+2$ est un produit, puisqu'on y voit la multiplication $3 \times x$. »
- « Toute somme se factorise en un produit de deux expressions du premier degré à coefficients réels. »
- « Les identités du chapitre ne donnent pas de formule générale pour écrire $a^2 + b^2$ comme produit de deux expressions du premier degré en a et b . »

- Rédiger une solution. Démontrer que, pour tout entier n , le nombre $(n+1)^2 - n^2$ est impair. La rédaction devra comporter : le choix et le statut de la lettre, la transformation algébrique, la mise sous une forme qui prouve le caractère impair, et une conclusion universelle. Terminer par un contrôle sur deux valeurs de n .

6. Sujets type Brevet

Cette banque regroupe des exercices de type Brevet, triés par type de tâche puis par difficulté croissante : sujets 1 et 3 à 6 dans le parcours recommandé (🎯) ; sujets 2 et 7 à 9 en perfectionnement (🔥). Rédiger intégralement chaque solution.

6.1. Brevet 1 : Questions flash de type brevet 🎯

★★☆☆

- a) Développer : $(x + 6)(x - 6)$; $(2x - 5)(2x + 5)$.
- b) Factoriser : $x^2 - 256$; $64x^2 - 9$.
- c) Donner l'opposé de $4x - 9$, puis développer $-(6 - x) + 2(x - 1)$.

6.3. Brevet 3 : Développer et prouver une factorisation 🎯

★★★★

On pose $E = (x - 3)^2 + (x - 3)(1 - 2x)$, où x désigne un nombre.

- a) Développer et réduire E .
- b) Prouver que la forme factorisée de E est $(x - 3)(-x - 2)$.
- c) Calculer E pour $x = 3$ en choisissant la forme la plus rapide. Justifier le choix.

6.4. Brevet 4 : Calcul astucieux justifié 🎯

★★☆☆

Sans calculatrice, en justifiant chaque fois par une identité remarquable :

- a) Justifier que $104 \times 96 = 9984$.
- b) Calculer 1002^2 .
- c) Calculer $57^2 - 43^2$.

6.5. Brevet 5 : Démonstration (parité) 🎯

★★★★

- a) Vérifier que $7 + 9 = 16$ et $15 + 17 = 32$ sont des multiples de 4.
- b) Démontrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est toujours un multiple de 4.
- c) La somme de deux nombres impairs quelconques est-elle toujours un multiple de 4 ? Démontrer, ou réfuter par un contre-exemple.

6.6. Brevet 6 : L'expression I 🎯

★★★★

On pose $I = (7x - 3)^2 - 25$.

- a) Développer et réduire I .
- b) Factoriser I (différence de deux carrés : le premier carré est un bloc).
- c) Pour $x = 1$, calculer I avec les trois écritures disponibles : la forme de départ, la forme développée et la forme factorisée. Comparer les calculs et justifier la forme que l'on choisirait.
- d) Pour $x = \frac{3}{7}$, comparer la forme de départ et la forme factorisée. Peut-on désigner une écriture qui serait toujours la meilleure, quelle que soit la valeur de x et quel que soit le but du calcul ?

9. Le pont vers le chapitre 02

Dernière page du chapitre. Ce qui suit pose une question que ce chapitre ne résoudra pas complètement : c'est exprès. La réponse générale ouvre le chapitre 02.

9.1. Factoriser... puis résoudre ? 🎯

★★☆☆

On cherche tous les nombres x tels que $x^2 - 9 = 0$.

- a) Vérifier que 3 convient. Est-ce forcément le seul ?
- b) Factoriser $x^2 - 9$. L'équation s'écrit alors $(x + 3)(x - 3) = 0$: un produit de deux facteurs vaut 0.
- c) Trouver un second nombre qui convient, et vérifier.
- d) La vraie question : un produit de deux nombres vaut 0, que peut-on dire de ces deux nombres ? La factorisation suffit-elle, avec les propriétés déjà établies dans ce chapitre, à prouver qu'il n'existe aucune troisième solution ? Formuler précisément ce qui est vérifié, ce qui est conjecturé et ce qui reste à démontrer. La propriété générale sera étudiée au chapitre 02.