



Feuille d'exercices

Calcul littéral : Identités remarquables

Difficulté : ★☆☆☆ très facile ★★☆☆ facile ★★★☆ moyen ★★★★ difficile

Parcours : 🏹 minimum 🎯 recommandé 🏆 perfectionnement

Repères progressifs : à compléter au fil du chapitre.

Nature d'une expression (partie 1 du cours). L'opération principale porte sur l'écriture entière. Développer transforme un produit en somme ; factoriser transforme une somme en produit. Un carré se lit $E^2 = E \times E$.

Acquis de 4^e. $k(a + b) = ka + kb$ et $ka + kb = k(a + b)$.

Double distributivité (partie 2) : $(a + b)(c + d) = \dots\dots\dots$

Identités remarquables (partie 3) :

$$(a + b)^2 = \dots\dots\dots \quad (a - b)^2 = \dots\dots\dots \quad (a + b)(a - b) = \dots\dots\dots$$

Écrire les entiers (parties 1 et 5). Pair : Impair : Trois entiers consécutifs :

Carnet des pièges, à compléter au fil du chapitre :

- Un signe ou une multiplication à l'intérieur ne détermine pas la nature : on repère
- L'opposé d'une somme ou d'une différence change
- La conjecture issue du tableau (activité du cours) et ce qui l'a démontrée :
- Quand un coefficient est au carré, ce qui doit être élevé au carré :
- Pour factoriser, la première structure à rechercher :
- Logique : des exemples ne démontrent pas une affirmation générale ; un seul contre-exemple suffit à la réfuter.

Méthode cumulative, photographier la structure :

1. Lire. Quelle opération porte sur l'expression entière ? Quelle structure veut-on obtenir ?
2. Développer. Écrire tous les produits avec leurs signes avant de réduire.
3. Reconnaître. Nommer la structure avant d'appliquer une identité remarquable.
4. Factoriser. Chercher d'abord un facteur commun, puis seulement une autre structure.
5. Toujours contrôler. Refaire la transformation en sens inverse ou substituer une valeur simple.

1. Nature d'une expression et développement

Réactivation express (chapitres précédents)

★☆☆☆

- a) Rendre irréductible $\frac{84}{126}$ (décomposition en facteurs premiers).
- b) Écrire sous la forme $2^n : 2^3 \times 2^5 ; \frac{2^9}{2^4}$.
- c) Donner la notation scientifique de 0,0072.
- d) Calculer $\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$ sous forme irréductible.
- e) Deux triangles semblables ont des côtés de rapport 2 : que dire du rapport de leurs aires ?

1.1. Somme ou produit ? Le tri

★☆☆☆

Pour chaque expression, dire si c'est une somme ou un produit (entourer l'opération principale, celle qui porte sur l'écriture entière), puis nommer ses termes ou ses facteurs.

- | | |
|---------------------|--------------------------|
| a) $3x + 2$ | f) $(2x - 3)^2$ |
| b) $5(x + 4)$ | g) $3(x + 1) + 2$ |
| c) $(x + 1)(x - 3)$ | h) $x(x + 1) + 3(x + 2)$ |
| d) $x^2 - 9$ | i) $2x^2$ |
| e) $7 - 5x$ | j) $(x + 5)(x - 5)$ |

1.2. Distributivité simple et opposé

★☆☆☆

- a) Développer et réduire : $3(2x + 5) ; -4x(6 - 3x) ; 7(3 - x) + 2x$.
- b) Donner l'opposé de chaque expression : $5 - 4x ; 3x - 7 ; -2x + 9 ; x^2 - 6x + 1$.
- c) Réduire : $5x + 3 - 2x + 8 ; 4x^2 - x + 3x^2 + 7x - 9$.

1.3. Double distributivité : les gammes

★★☆☆

Développer et réduire.

- | | |
|-----------------------|---------------------------|
| a) $(x + 3)(x + 5)$ | e) $-4x(6 - 3x) - 8x^2$ |
| b) $(x - 3)(2x + 5)$ | f) $3(2x + 1) - (6 - x)$ |
| c) $(3x + 1)(2x - 7)$ | g) $(-3x + 5)(2x - 3)$ |
| d) $(2x - 3)(5x + 7)$ | h) $(x + 6)(x - 2) - x^2$ |

1.4. Expressions mixtes à réduire

★★★☆☆

Développer et réduire chaque expression.

- a) $A = 5(4x - 7) + (x + 9)(5x - 6)$
- b) $B = (x - 5)(x + 7) + (2x - 4)(3x - 1)$
- c) $C = 3x(x - 3) - (x + 7)(4x - 2)$
- d) $D = (y - 9)(3y + 2) - (2y - 7)(4y - 5)$

1.5. Démontrer la double distributivité ☹

★★★☆☆

On veut démontrer que, pour tous nombres réels a, b, c, d : $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$, en n'utilisant que la distributivité simple $k(c + d) = kc + kd$.

- On pose $k = a + b$. Écrire $(a + b)(c + d)$ à l'aide de k , et développer avec la distributivité simple.
- Dans le résultat, remplacer k par $a + b$, et développer chacun des deux produits obtenus (distributivité simple, en distribuant cette fois par la droite : $(a + b)c = ac + bc$).
- Recoller les quatre termes, puis les remettre dans l'ordre $ac + ad + bc + bd$ en nommant la propriété utilisée. Combien de fois a-t-on appliqué la distributivité simple en tout ?
- Pour aller au bout : adapter la démonstration pour obtenir la formule de $(a + b)(c - d)$.

2. Identités remarquables : développer

2.1. Les gammes ♪

★★☆☆☆

Développer et réduire à l'aide de l'identité adaptée, en écrivant l'étape « formule » avant le résultat.

- | | | |
|-----------------|---------------------|---------------------|
| a) $(x + 3)^2$ | d) $(y - 6)^2$ | g) $(t - 5)(t + 5)$ |
| b) $(x + 10)^2$ | e) $(a - 7)(a + 7)$ | h) $(n + 1)^2$ |
| c) $(x - 4)^2$ | f) $(x + 8)(x - 8)$ | i) $(4 - a)^2$ |

2.2. Avec des coefficients ☹

★★☆☆☆

Développer et réduire.

- | | |
|-----------------|-----------------------|
| a) $(2x + 1)^2$ | e) $(3x - 2)(3x + 2)$ |
| b) $(3x + 7)^2$ | f) $(5x + 7)(5x - 7)$ |
| c) $(3 - 2x)^2$ | g) $(y - 2,5)^2$ |
| d) $(4x - 3)^2$ | h) $(1 - a)(1 + a)$ |

2.3. Le sens inverse : reconnaître une forme développée ☹

★★★☆☆

- a) Chacune des expressions suivantes est le développement d'une identité remarquable. Retrouver l'expression de départ :

$$x^2 + 10x + 25; \quad x^2 - 6x + 9; \quad 4x^2 - 12x + 9; \quad 4y^2 + 40y + 100; \quad 49t^2 - 14t + 1.$$

- b) Nombre manquant. Déterminer le nombre manquant pour que l'expression soit le carré d'une somme ou d'une différence :

$$x^2 + \dots x + 9; \quad 4x^2 - 4x + \dots; \quad \dots x^2 + 100x + 100.$$

- c) Pour la première expression du b), combien y a-t-il de réponses possibles ?

2.4. Vrai ou faux ? ☹

★★☆☆☆

Pour chaque affirmation : dire si elle est vraie ou fausse, puis justifier. Si elle est vraie : un calcul pour une égalité entre nombres donnés, une identité ou un calcul littéral pour une affirmation « pour tout », un exemple pour une affirmation « il existe ». Si elle est fausse : un contre-exemple chiffré.

- Pour tout nombre a : $(2a + 3)^2 = 4a^2 + 9$.
- Le carré de la différence de deux nombres est égal à la différence des carrés de ces deux nombres.
- $26^2 - 25^2 = 26 + 25$.
- Pour tout nombre a : $(a + 5)^2 - (a - 5)^2 = 20a$.
- Pour tout nombre x , $x^2 - 12x + 9$ est le carré d'un nombre.
- Pour tous nombres a et b : $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.
- Il existe des nombres a et b pour lesquels $(a + b)^2 = a^2 + b^2$.

2.5. Avec des fractions

★★★☆☆

Développer et réduire.

a) $\left(\frac{1}{2} + x\right)\left(\frac{1}{2} - x\right)$

d) $\left(\frac{t}{3} + 6\right)^2$

b) $\left(\frac{x}{2} - 3\right)^2$

e) $\left(\frac{2x}{5} - 1\right)\left(\frac{2x}{5} + 1\right)$

c) $\left(\frac{1}{2} - 3x\right)^2$

2.6. Trois écritures, une seule expression

★★★☆☆

On considère les deux expressions :

$$A = a^2 - ab + b^2 \quad \text{et} \quad B = (a + b)^2 - 3ab.$$

a) Calculer A et B pour $a = 5$ et $b = 3$. Que constate-t-on ?

b) Sans rien calculer, Zoé parie que pour $a = 2023$ et $b = 1515$, les deux expressions donneront encore le même résultat. À ce stade, ce pari est-il déjà prouvé ?

c) Démontrer que $A = B$ pour tous nombres a et b (développer B et réduire). Le pari de Zoé était-il gagné d'avance ?

d) Remarque culturelle (résultat admis). Lorsque $a + b \neq 0$, la fraction $C = \frac{a^3 + b^3}{a + b}$ est elle aussi égale à A . Vérifier ce fait pour $a = 5$ et $b = 3$.

2.7. La formule de $(a + b + c)^2$

★★★☆☆

On veut démontrer que, pour tous nombres a , b , c :

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca).$$

a) Tester la formule pour $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$ (calculer séparément les deux membres). Cela suffit-il pour conclure ?

b) Reprendre l'astuce du bloc (celle de la démonstration de la double distributivité, en 1.5) : écrire $(a + b + c)^2 = [(a + b) + c]^2$, puis appliquer l'identité du carré d'une somme aux deux blocs $(a + b)$ et c .

c) Achever le développement, réduire, et conclure.

d) Contrôle de structure : le développement doit contenir trois carrés et trois doubles produits, un double produit par paire de lettres. Vérifier que le résultat obtenu les contient tous.

3. Factoriser

3.1. Facteur commun

★★☆☆☆

Souligner un facteur commun, puis factoriser en extrayant tous les facteurs communs encore visibles.

a) $5a + 15b$

c) $7x - 35$

e) $8 + 2x$

b) $12x^2 - 15x$

d) $x^2 - 5x$

f) $30a + 36a^2$

3.2. Facteur commun composé

★★★☆☆

Le facteur commun est une parenthèse entière. Factoriser, puis réduire la seconde parenthèse.

a) $A = (x - 2)(x + 3) + (x - 2)(x + 6)$

b) $B = (x + 5)(4x - 2) - (x + 5)(9x + 1)$

c) $C = (3x + 8)^2 - (6x - 7)(3x + 8)$

d) $D = (4x + 5)^2 - 5(4x + 5)$

3.3. Factoriser par identité : les pièges

★★★☆☆

Reconnaître la structure (photographier : combien de termes ? des carrés ? le double produit ?), puis factoriser si c'est possible avec les outils du chapitre. Dans deux cas, aucune des trois identités ne permet ici de conclure : lesquels ? Pour chacun, expliquer précisément ce qui bloque et dire si ce blocage est provisoire ou non dans le cadre du chapitre.

- | | |
|-----------------------|----------------------|
| a) $x^2 - 64$ | g) $36z^2 - 1$ |
| b) $49x^2 - 16$ | h) $x^2 - 13$ |
| c) $x^2 + 2x + 1$ | i) $16x^2 - 144$ |
| d) $9y^2 - 24y + 16$ | j) $x^2 + 81$ |
| e) $25 - 100t^2$ | k) $4x^2 - 49$ |
| f) $64 - 80x + 25x^2$ | l) $x^2 - 20x + 100$ |

3.4. Différences de carrés emboîtées

★★★☆☆

Ici, a ou b est un bloc entre parenthèses. Factoriser, puis réduire chaque parenthèse (et mettre en facteur un nombre si possible).

- a) $A = (x + 1)^2 - 36$
 b) $B = 25 - (2x + 3)^2$
 c) $C = 4x^2 - (x - 5)^2$
 d) $D = (8x - 4)^2 - 9x^2$

3.5. Le tableau va-et-vient

★★★☆☆

Recopier et compléter le tableau (chaque ligne utilise une identité remarquable, dans un sens ou dans l'autre).

Forme factorisée	Forme développée
$(x + 30)^2$	
	$x^2 - 12x + 36$
	$25y^2 + 50y + 25$
$(t - 8)(t + 8)$	
	$x^2 - 81$
$(7t - 5)^2$	

3.6. La copie de Louise (chasse à l'erreur)

★★★☆☆

Pour factoriser $E = 4x^2 - 4x + 1$, Louise a rendu la copie suivante :

« Je vois le facteur commun $4x$, donc $E = 4x(x - 1)$. C'est factorisé, j'ai fini ! »

- a) Développer $4x(x - 1)$. Obtient-on E ? Quel terme de E a disparu dans la copie de Louise ?
 b) Contrôler autrement, sans développer : calculer E puis $4x(x - 1)$ pour $x = 1$. Conclure.
 c) Donner la factorisation correcte de E , et la vérifier en développant.
 d) Expliquer la différence entre les deux contrôles précédents : que permet de conclure le test en $x = 1$? Qu'établit le redéveloppement de $(2x - 1)^2$?

3.7. Factoriser par groupement de termes



★★★☆☆

Méthode (quatre termes ou plus). Quand il n'y a ni facteur commun visible ni identité reconnaissable : grouper les termes deux par deux, factoriser chaque groupe, et faire apparaître une parenthèse commune. Le choix des groupes peut tout changer : si un groupement échoue, on en essaie un autre.

- Factoriser $A = ab + a + b + 1$ en suivant le groupement $(ab + a) + (b + 1)$.
- On veut factoriser $B = a^2 - a - x^2 - x$. Essayer d'abord le groupement $(a^2 - a) - (x^2 + x)$: factoriser chaque groupe, et expliquer pourquoi on reste bloqué.
- Reprendre B avec le groupement $(a^2 - x^2) - (a + x)$, et factoriser complètement.
- Vérifier le résultat de c) en substituant $a = 3$ et $x = 1$ dans B et dans le produit obtenu.

4. Le calcul malin (la récompense)

Le principe. Réécrire sans changer la valeur, puis choisir la voie qui réduit vraiment les opérations restantes : identité remarquable ou distributivité. Un nombre « rond » est un indice, pas une règle. Exemples : $61^2 = (60 + 1)^2$; $52 \times 48 = (50 + 2)(50 - 2)$; $62^2 - 58^2 = (62 + 58)(62 - 58)$. Aucune multiplication posée n'est autorisée dans cette section : c'est le jeu.

4.1. Les carrés voisins des nombres ronds



★★★☆☆

Calculer de tête, en écrivant l'identité utilisée, le calcul de chaque terme et le résultat, puis contrôler.

- | | | | |
|------------|--------------------|-----------|-------------|
| a) 101^2 | c) 102×98 | e) 21^2 | g) 35^2 |
| b) 99^2 | d) 103×97 | f) 19^2 | h) 1001^2 |

4.2. En une seule multiplication



★★★☆☆

Calculer mentalement, en indiquant l'identité utilisée.

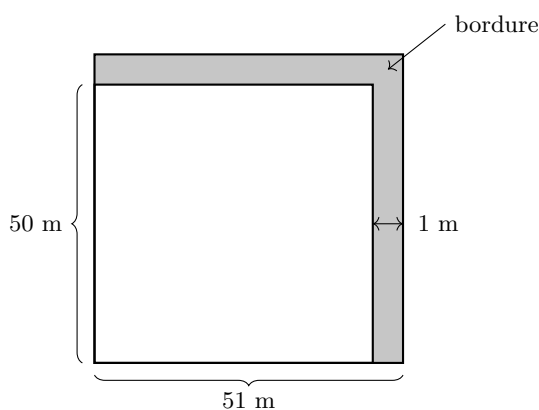
- | | | |
|-------------------|--------------------|--|
| a) $73^2 - 67^2$ | c) $43^2 - 42^2$ | e) $45^2 + 2 \times 45 \times 5 + 5^2$ |
| b) $101^2 - 99^2$ | d) $8,5^2 - 1,5^2$ | f) $14^2 - 2 \times 14 \times 4 + 4^2$ |

4.3. L'aire entre deux carrés



★★★☆☆

Un carré de 51 m de côté contient un carré de 50 m de côté (figure ci-dessous).



La figure n'est pas à l'échelle.

- Calculer mentalement l'aire de la bordure grise (la surface entre les deux carrés).
- Avant de valider : cette aire est-elle vraisemblable ? La bordure grise est un L formé de deux bandes de 1 m de large, le long de deux côtés adjacents seulement ; estimer son aire sans calcul exact, puis comparer avec le résultat du a).
- Généraliser : pour tout réel $n > 0$, montrer que l'aire entre un carré de côté $n + 1$ et un carré de côté n , placés comme sur la figure, vaut $2n + 1$. Où a-t-on déjà rencontré cette expression dans le chapitre ?

4.4. Champions : la cour des grands

★★★☆☆

De tête, en choisissant et en justifiant la transformation la plus économique : identité remarquable ou distributivité.

- a) 1005^2
- b) $10,1 \times 9,9$
- c) 38×998
- d) $2026^2 - 2025^2 - 4051$

4.5. Contrôler sans calculer

★★★☆☆

Les affirmations suivantes sont proposées comme vraies. Lorsqu'une lettre apparaît, l'égalité est prétendue vraie pour tout réel. Réfuter chaque affirmation en une phrase, sans développement complet ni opération posée (structure, signe, chiffre des unités, valeur test...). Dans les items avec une lettre, un contre-exemple réfute « pour tout » sans signifier que l'égalité échoue pour chaque valeur.

- a) « $(x + 10)^2 = x^2 + 100$. »
- b) « $25 - 100t^2 = (5 - 10t)^2$. »
- c) « $47 \times 53 = 2500$. »
- d) « $(3x)^2 = 3x^2$. »

4.6. Périmètre fixé, aire maximale : le carré gagne

★★★☆☆

Parmi tous les rectangles de périmètre 40 m, lequel a la plus grande aire ?

- a) Vérifier que les rectangles 12×8 , 15×5 et $10,5 \times 9,5$ ont bien pour périmètre 40 m, puis calculer leurs aires.
- b) Un rectangle de périmètre 40 m a deux dimensions dont la somme vaut 20. Après avoir nommé la plus grande en premier, expliquer pourquoi on peut les écrire $10 + d$ et $10 - d$ avec $0 \leq d < 10$.
- c) Développer $(10 + d)(10 - d)$. En déduire que l'aire ne dépasse jamais 100 m^2 , et qu'elle atteint 100 m^2 pour une seule forme : laquelle ?
- d) Problème associé (aire fixée), preuve nouvelle. Un rectangle d'aire 100 m^2 a des côtés $x > 0$ et $y > 0$ tels que $xy = 100$. En partant de $(x - y)^2 \geq 0$, montrer que son périmètre est au moins 40 m et déterminer le cas d'égalité.

Repère « Justifier et raisonner ». Vrai/faux : 2.4 ; copie erronée : 3.6 ; cohérence sans calcul : 4.5 ; rédaction et démonstration autonomes : 5.1 à 5.4. Commencer par dire ce que l'exercice demande (réfuter, corriger, démontrer) avant de calculer.

5. Programmes de calcul et démonstrations

5.1. Le programme d'Arthur : deux essais ne suffisent pas pour conclure pour tout x

★★★☆☆

On considère le programme de calcul ci-dessous.

Programme de calcul

- Choisir un nombre de départ.
- Multiplier ce nombre par (-2) .
- Ajouter 5 au produit.
- Multiplier le résultat par 5.
- Écrire le résultat obtenu.

- a) Vérifier que, lorsque le nombre de départ est 2, on obtient 5.
- b) Lorsque le nombre de départ est 3, quel résultat obtient-on ?
- c) Quel nombre faut-il choisir au départ pour que le résultat soit 0 ?
- d) Arthur prétend que, pour n'importe quel nombre de départ x , l'expression $(x - 5)^2 - x^2$ donne le résultat du programme. Peut-on trancher en testant $x = 2$ et $x = 3$? A-t-il raison ? Démontrer.

Modifier, créer, résoudre

1. Modifier et prévoir. Dans le programme d'Arthur, remplacer la dernière multiplication par 5 par une multiplication par 3. Sans tout recalculer, prévoir si le nombre de départ qui donne 0 change, puis vérifier littéralement.
2. Créer sous contrainte. Inventer un programme d'au moins trois étapes dont le résultat, pour un nombre de départ x , se réduit exactement à $6x - 12$. Les consignes doivent être exécutables dans un ordre unique.
3. Résoudre et vérifier. Traduire le programme en une expression, prouver qu'elle vaut $6x - 12$ et la vérifier avec deux nombres.

5.2. Deux programmes, un même résultat ?

★★★☆☆

Programme A

- Choisir un nombre.
- Soustraire 1.
- Élever au carré.
- Soustraire 1.

Programme B

- Choisir un nombre.
- Soustraire 2.
- Multiplier par le nombre choisi.

- Appliquer les deux programmes aux nombres 3, 10 et -5 . Que constate-t-on ? Émettre une conjecture.
- Démontrer la conjecture (exprimer le résultat de chaque programme pour un nombre de départ x).

5.3. Type Brevet : le programme au carré

★★★☆☆

On considère le programme : choisir un nombre de départ ; ajouter 1 ; calculer le carré du résultat ; lui soustraire le carré du nombre de départ ; écrire le résultat final.

- Vérifier que lorsque le nombre de départ est 1, on obtient 3.
- Lorsque le nombre de départ est 2, quel résultat obtient-on ?
- Le nombre de départ étant x , exprimer le résultat final en fonction de x , puis développer et réduire $P = (x+1)^2 - x^2$. Utiliser ici la double distributivité (une seconde méthode consiste à factoriser P comme une différence de deux carrés).
- Quel nombre de départ faut-il choisir pour obtenir 15 ?

5.4. Conjecture au tableur, preuve littérale : trois entiers consécutifs

★★★☆☆

On s'intéresse à la somme de trois entiers consécutifs (par exemple $7 + 8 + 9$).

- Calculer $(-8) + (-7) + (-6)$, puis $7 + 8 + 9$, puis $199 + 200 + 201$. Diviser chaque résultat par 3. Que remarque-t-on ?
- On prépare la feuille de calcul ci-dessous. Sélectionner **A2:A3** et prolonger cette série jusqu'à **A201**. Quelles formules faut-il saisir en **B2**, **C2** et **D2**, puis recopier jusqu'à la ligne 201 ?

	A	B	C	D
1	1 ^{er} entier	2 ^e entier	3 ^e entier	somme
2	-100			
3	-99			

- Formuler la conjecture. Qu'établissent exactement les 200 lignes affichées ? Pourquoi ne suffisent-elles pas à démontrer un énoncé portant sur tous les entiers ?
- Démontrer la conjecture. Choisir une lettre pour l'un des trois nombres, préciser lequel elle désigne, puis rédiger avec un entier quelconque, une chaîne d'égalités justifiées et une conclusion en « pour tout entier ».
- Montrer de plus que la somme est toujours le triple de l'un des trois entiers. Lequel ?
- La somme de quatre entiers consécutifs est-elle toujours un multiple de 4 ? Démontrer, ou réfuter par un contre-exemple.

5.5. La différence des carrés de deux impairs consécutifs

★★★★

Anabelle affirme : « La différence des carrés de deux nombres impairs consécutifs est toujours un multiple de 8. »

- Tester l'affirmation sur $(3; 5)$, $(7; 9)$ et $(11; 13)$.
- Écrire deux impairs consécutifs à l'aide d'un entier n , puis démontrer que l'affirmation d'Anabelle est vraie. Conseil : la factorisation $a^2 - b^2$ est plus rapide que le développement, comparer avec le modèle du cours.
- Où retrouve-t-on, dans le résultat factorisé, la somme et l'écart des deux nombres de départ ?

5.6. Divisible par 7 (écho du chapitre 01)

★★★★

Soit n un entier positif. Démontrer que le nombre

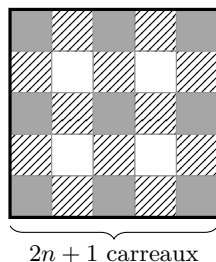
$$2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$$

est toujours divisible par 7. Indication : une somme ne se « regroupe » pas, elle se factorise, souvenir du chapitre 01 ($4^{15} + 8^{10}$) : mettre 2^n en facteur.

5.7. La nappe à carreaux

★★★☆☆

Sur une nappe à carreaux blancs, rouges et rayés, Zed observe un carré dont les quatre carreaux des coins sont rouges : chaque côté de ce carré compte alors un nombre impair de carreaux, que l'on écrit $2n + 1$ (avec n entier ≥ 1). Les couleurs alternent comme sur la figure (côté 5, c'est-à-dire $n = 2$; les carreaux rouges sont figurés en gris foncé).



- Sur la figure, compter les carreaux de chaque sorte. Vérifier que le total vaut bien 5^2 .
- Dans le carré de côté $2n + 1$, les rangées « à coins rouges » alternent rouge/rayé (elles commencent et finissent par un rouge) ; les autres rangées alternent rayé/blanc. Combien y a-t-il de rangées de chaque type ? Combien chacune contient-elle de carreaux de chaque sorte ?
- En déduire, en fonction de n , le nombre de carreaux rouges, le nombre de carreaux blancs et le nombre de carreaux rayés (donner des expressions factorisées).
- Vérifier que la somme des trois expressions de c) vaut $(2n + 1)^2$ (développer et réduire). Pourquoi ce contrôle était-il prévisible ?
- Contrôle numérique : pour $n = 2$, retrouve-t-on les comptes du a) ?

5.8. Une baisse puis une hausse du même pourcentage

★★★☆☆

Un placement de capital initial strictement positif perd 50 % une année, puis regagne 50 % l'année suivante. Beaucoup pensent : « on est revenu au point de départ ». C'est faux.

- Un portefeuille vaut 1 000 €. Il perd 50 %, puis regagne 50 %. Combien vaut-il à la fin, et quel pourcentage a-t-il réellement perdu ?
- Recommencer avec une perte puis une hausse de 10 %, puis avec 30 %. Que devient à chaque fois le nombre par lequel on multiplie le capital de départ ?
- Démontrer le cas général : perdre une proportion x (avec $0 < x < 1$) puis regagner la même proportion x revient à multiplier le capital par $(1 - x)(1 + x)$. Développer ce produit, et en déduire qu'on reste toujours en dessous du capital de départ dès que $x \neq 0$.
- L'ordre change-t-il quelque chose ? Comparer « regagner x puis perdre x » et « perdre x puis regagner x ». Justifier.

Bloc transversal : Justifier et raisonner

★★★☆☆

- Repérer l'erreur. Un élève développe et réduit $E = (2x + 3)^2 - (x - 1)(2x + 3)$:

$$E = 4x^2 + 9 - (2x^2 + 3x - 2x - 3) = 4x^2 + 9 - 2x^2 - x - 3 = 2x^2 - x + 6.$$

Localiser précisément la première égalité fautive, nommer l'erreur commise, puis donner la forme réduite correcte de E . Vérifier enfin le résultat en factorisant E par $(2x + 3)$.

- Contrôler la cohérence sans calcul. Chaque égalité est prétendue vraie pour tout réel x . Réfuter cette affirmation en une ligne, à l'aide d'un contre-exemple ou d'une identité. Une égalité peut rester vraie pour certaines valeurs de x .

- $(x + 5)^2 = x^2 + 25$
- $(5x)^2 = 5x^2$
- $x^2 - 64 = (x - 8)^2$
- $x^2 + 16 = (x + 4)^2$

- Vrai ou faux ? Justifier chaque réponse.

- « $3x + 2$ est un produit, puisqu'on y voit la multiplication $3 \times x$. »
- « Toute somme se factorise en un produit de deux expressions du premier degré à coefficients réels. »
- « Les identités du chapitre ne donnent pas de formule générale pour écrire $a^2 + b^2$ comme produit de deux expressions du premier degré en a et b . »

- Rédiger une solution. Démontrer que, pour tout entier n , le nombre $(n + 1)^2 - n^2$ est impair. La rédaction devra comporter : le choix et le statut de la lettre, la transformation algébrique, la mise sous une forme qui prouve le caractère impair, et une conclusion universelle. Terminer par un contrôle sur deux valeurs de n .

6. Sujets type Brevet

Cette banque regroupe des exercices de type Brevet, triés par type de tâche puis par difficulté croissante : sujets 1 et 3 à 6 dans le parcours recommandé (🎯) ; sujets 2 et 7 à 9 en perfectionnement (🔥). Rédiger intégralement chaque solution.

6.1. Brevet 1 : Questions flash de type brevet 🎯

★★☆☆

- a) Développer : $(x + 6)(x - 6)$; $(2x - 5)(2x + 5)$.
- b) Factoriser : $x^2 - 256$; $64x^2 - 9$.
- c) Donner l'opposé de $4x - 9$, puis développer $-(6 - x) + 2(x - 1)$.

6.2. Brevet 2 : Programme de calcul 🔥

★★★☆☆

On considère le programme : choisir un nombre ; ajouter 3 ; élever le résultat au carré ; soustraire le carré du nombre de départ.

- a) Vérifier qu'en choisissant 2 au départ, on obtient 21.
- b) Exprimer le résultat en fonction du nombre de départ x , puis développer et réduire.
- c) Quel nombre de départ donne le résultat 30 ?

6.3. Brevet 3 : Développer et prouver une factorisation 🎯

★★★☆☆

On pose $E = (x - 3)^2 + (x - 3)(1 - 2x)$, où x désigne un nombre.

- a) Développer et réduire E .
- b) Prouver que la forme factorisée de E est $(x - 3)(-x - 2)$.
- c) Calculer E pour $x = 3$ en choisissant la forme la plus rapide. Justifier le choix.

6.4. Brevet 4 : Calcul astucieux justifié 🎯

★★★☆☆

Sans calculatrice, en justifiant chaque fois par une identité remarquable :

- a) Justifier que $104 \times 96 = 9984$.
- b) Calculer 1002^2 .
- c) Calculer $57^2 - 43^2$.

6.5. Brevet 5 : Démonstration (parité) 🎯

★★★☆☆

- a) Vérifier que $7 + 9 = 16$ et $15 + 17 = 32$ sont des multiples de 4.
- b) Démontrer que la somme de deux nombres impairs consécutifs est toujours un multiple de 4.
- c) La somme de deux nombres impairs quelconques est-elle toujours un multiple de 4 ? Démontrer, ou réfuter par un contre-exemple.

6.6. Brevet 6 : L'expression I 🎯

★★★☆☆

On pose $I = (7x - 3)^2 - 25$.

- a) Développer et réduire I .
- b) Factoriser I (différence de deux carrés : le premier carré est un bloc).
- c) Pour $x = 1$, calculer I avec les trois écritures disponibles : la forme de départ, la forme développée et la forme factorisée. Comparer les calculs et justifier la forme que l'on choisirait.
- d) Pour $x = \frac{3}{7}$, comparer la forme de départ et la forme factorisée. Peut-on désigner une écriture qui serait toujours la meilleure, quelle que soit la valeur de x et quel que soit le but du calcul ?

6.7. Brevet 7 : L'allée du jardin 🏡

★★★★

Un jardin carré de côté x (en mètres) est entouré d'une allée de 3 m de large, formant un grand carré extérieur.

- Faire un schéma. Exprimer le côté du grand carré en fonction de x .
- Montrer que l'aire de l'allée vaut $12(x + 3)$.
- Calculer cette aire pour $x = 17$ m : de tête, grâce à la forme factorisée.
- Le résultat de la question c) est-il vraisemblable ? Comparer avec l'aire d'un rectangle de 3 m sur 80 m.

6.8. Brevet 8 : Le produit des deux voisins 🏡

★★★★

- Démontrer que pour tout entier n : $(n - 1)(n + 1) + 1 = n^2$.
- En déduire, de tête : 59×61 ; 79×81 ; 999×1001 .
- Énoncer la propriété démontrée en a) par une phrase commençant par « Le produit de deux entiers qui encadrent immédiatement l'entier n , c'est-à-dire $n - 1$ et $n + 1$... ».

6.9. Brevet 9 : Somme des carrés de deux consécutifs 🏡

★★★★

- À l'aide d'un tableur ou à la main, calculer $n^2 + (n + 1)^2$ pour $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3$ et $n = 4$. Émettre une conjecture sur la parité du résultat.
- Démontrer cette conjecture.
- Question métacognitive : dans la démonstration, à quel endroit précis voit-on que le résultat est impair ?

7. Exercices contextualisés interdisciplinaires

7.1. Physique : L'énergie du freinage 🏡

★★★☆☆

L'énergie cinétique (en joules, notés J) d'un véhicule de masse m (en kg) roulant à la vitesse v (en m/s) est donnée par la formule $E_c = \frac{1}{2} m v^2$.

- Calculer E_c pour une voiture de 1 200 kg roulant à 10 m/s (soit 36 km/h).
- La vitesse double (20 m/s). Karim affirme : « l'énergie double aussi ». Calculer, puis expliquer son erreur à l'aide de $(2v)^2$.
- Généraliser : si la vitesse est multipliée par k , par combien l'énergie est-elle multipliée ? Quel encadré du cours retrouve-t-on ici ?

7.2. Aménagement : Le terrain reconfiguré 🏡

★★★☆☆

Une commune possède un terrain carré de côté a (en mètres, $a > 5$). Un projet le remplace par un terrain rectangulaire : 5 m de plus en longueur, 5 m de moins en largeur, soit $(a + 5)$ par $(a - 5)$.

- Le maire annonce : « la surface est inchangée : ce qu'on gagne d'un côté, on le perd de l'autre ». Tester avec $a = 20$: que valent les deux aires ?
- Exprimer l'aire du rectangle en fonction de a et démontrer que le maire a tort : le terrain perd toujours la même surface. Laquelle ?
- Ce résultat dépend-il de la taille du terrain ? Le commenter en une phrase (c'est elle, la « réponse », pas le calcul).

7.3. Programmation : Le testeur d'identités 🏡

★★★☆☆

On a écrit le script Python ci-dessous.

```
for x in range(-5, 6):  
    print(x, (x+5)**2 - x**2, 10*x + 25)
```

- Que calcule ce script ? Écrire les lignes affichées pour $x = -5, x = 0$ et $x = 2$.
- Quelle conjecture l'affichage complet suggère-t-il ?
- Ce script teste 11 valeurs. Est-ce une démonstration ? Démontrer la conjecture à la main.
- Modifier le script (sur papier) pour tester l'affirmation fausse « $(x + 5)^2 = x^2 + 25$ » : quelle est la seule valeur de x affichant deux nombres égaux ?

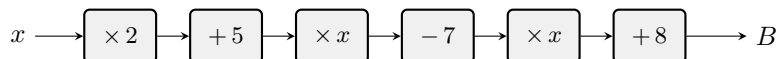
7.4. Histoire du calcul : La machine de Horner

★★☆☆

Pour évaluer $B = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 8$, une calculatrice « naïve » calcule chaque terme séparément, puis additionne. Une écriture dite de Horner permet d'emboîter les multiplications :

$$2x^3 + 5x^2 - 7x + 8 = ((2x + 5)x - 7)x + 8.$$

On peut représenter ce calcul par une « machine » qui enchaîne les opérations :



- Faire fonctionner la machine pour $x = 2$ (noter le résultat de chaque étape), puis calculer $2x^3 + 5x^2 - 7x + 8$ pour $x = 2$ par la voie « naïve ». Comparer.
- Démontrer que la machine ne triche jamais : développer $((2x + 5)x - 7)x + 8$ et réduire.
- Compter les multiplications : combien en faut-il par la voie naïve (rappel : $x^3 = x \times x \times x$) ? Et avec la machine ?
- Écrire $C = 3x^2 - 4x + 3$ sous la même forme emboîtée, puis évaluer C de tête pour $x = 10$.

8. Pour aller plus loin

Banque de perfectionnement, triée par difficulté croissante. Le 8.1 est un défi de raisonnement pur ; le 8.2 est une « preuve sans mots » à décoder ; le 8.3 anticipe le chapitre sur la racine carrée (Prép. 2^{de} : la propriété nécessaire est fournie). Les 8.4 à 8.6 prolongent la banque : un carré parfait caché dans un produit de quatre entiers consécutifs, des factorisations de nombres géants (l'écho arithmétique du 8.1) et une machine à fabriquer des triplets pythagoriciens.

8.1. Défi : Un carré presque premier

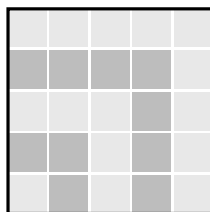
★★★★

Trouver tous les entiers naturels n tels que $n^2 - 9$ soit un nombre premier. Indice : factoriser. Un produit de deux entiers peut-il être premier ?

8.2. Preuve sans mots : La somme des impairs

★★★★

Observer la figure : chaque « équerre » (en L) ajoute une couche au carré.



$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = ?$$

- Que vaut $1 + 3 + 5 + 7 + 9$? Et $1 + 3 + 5 + \dots + 19$ (les dix premiers impairs) ?
- Quelle propriété générale la figure « démontre-t-elle sans mots » ? L'énoncer avec la lettre n .
- Pour les experts : vérifier cette propriété par le calcul, en admettant que le k -ième nombre impair est $2k - 1$, et en calculant $n^2 - (n - 1)^2$ (l'aire de la n -ième équerre).

8.3. Prép. 2^{de} : L'expression conjuguée

★★★★

Cet exercice utilise le futur nombre $\sqrt{7}$ (« racine carrée de 7 »), défini comme le nombre positif dont le carré vaut 7 : $\sqrt{7} \times \sqrt{7} = 7$ (et $\sqrt{7} \approx 2,65$). Le reste n'est que ce chapitre.

On veut réécrire $B = \frac{1}{4 - \sqrt{7}}$ sans racine au dénominateur.

- Calculer $(4 - \sqrt{7})(4 + \sqrt{7})$ à l'aide d'une identité remarquable et de la propriété fournie.
- En multipliant le numérateur et le dénominateur de B par $(4 + \sqrt{7})$ (l'expression conjuguée de $4 - \sqrt{7}$), écrire B sans racine au dénominateur.
- Quelle identité remarquable « fait tout marcher » ? En quoi ce procédé ressemble-t-il au calcul de 102×98 ?

8.4. Le carré parfait caché

★★★★

Calculer $1 \times 2 \times 3 \times 4 + 1$, puis $2 \times 3 \times 4 \times 5 + 1$, puis $3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1$: à chaque fois, le résultat est un carré parfait ($25 = 5^2$, $121 = 11^2$, $361 = 19^2$). Hasard ? Soit n un entier naturel ; on pose $a = n(n+3)$.

a) Développer a , puis développer $(n+1)(n+2)$. En déduire que $(n+1)(n+2) = a+2$.

b) En regroupant astucieusement les quatre facteurs, montrer que

$$n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = a(a+2) + 1,$$

puis que ce nombre est égal à $(a+1)^2$.

c) Conclure par une phrase (« le produit de quatre entiers consécutifs, augmenté de 1, est toujours... ») et préciser de quel nombre c'est le carré, en fonction de n . Contrôle : retrouver 19^2 pour $n=3$.

8.5. Facteurs premiers géants (écho du 8.1)

★★★★

Aucune multiplication posée, aucune calculatrice : ici, les identités remarquables cassent des nombres à sept ou huit chiffres. (On admet que 1 667, 4 999 et 1 009 sont des nombres premiers.)

a) Remarquer que $A = 24\,999\,999 = 5\,000^2 - 1$. En déduire une factorisation de A , puis sa décomposition en facteurs premiers (l'un des deux facteurs obtenus cache encore un facteur 3).

b) Vérifier que $B = 1\,018\,081$ s'écrit $10^6 + 18 \times 10^3 + 81$. Reconnaître un carré parfait (contrôler le double produit !), et en déduire la décomposition en facteurs premiers de B .

c) Comme au 8.1 : vérifier que, pour tout entier n , $n^3 - 8 = (n-2)(n^2 + 2n + 4)$, puis trouver tous les entiers naturels n tels que $n^3 - 8$ soit un nombre premier.

8.6. La machine à triplets pythagoriciens

★★★★

Un triplet pythagorien est un trio d'entiers strictement positifs (a, b, c) tels que $a^2 + b^2 = c^2$: par exemple $(3, 4, 5)$, rencontré en 4°. Voici une machine à en fabriquer autant qu'on veut. On choisit deux entiers u et v avec $0 < u < v$, et on pose

$$a = v^2 - u^2, \quad b = 2uv, \quad c = v^2 + u^2.$$

a) Calculer le triplet (a, b, c) obtenu pour $(u, v) = (1, 2)$, puis $(2, 3)$, $(3, 4)$ et $(2, 5)$.

b) Vérifier, sur le premier triplet obtenu, que $a^2 + b^2 = c^2$.

c) Démontrer que la machine fonctionne toujours : développer d'une part $(v^2 - u^2)^2 + (2uv)^2$, d'autre part $(v^2 + u^2)^2$, puis conclure.

d) Fabriquer un nouveau triplet pythagorien en choisissant un autre couple (u, v) , et le vérifier.

9. Le pont vers le chapitre 02

Dernière page du chapitre. Ce qui suit pose une question que ce chapitre ne résoudra pas complètement : c'est exprès. La réponse générale ouvre le chapitre 02.

9.1. Factoriser... puis résoudre ?

★★☆☆

On cherche tous les nombres x tels que $x^2 - 9 = 0$.

a) Vérifier que 3 convient. Est-ce forcément le seul ?

b) Factoriser $x^2 - 9$. L'équation s'écrit alors $(x+3)(x-3) = 0$: un produit de deux facteurs vaut 0.

c) Trouver un second nombre qui convient, et vérifier.

d) La vraie question : un produit de deux nombres vaut 0, que peut-on dire de ces deux nombres ? La factorisation suffit-elle, avec les propriétés déjà établies dans ce chapitre, à prouver qu'il n'existe aucune troisième solution ? Formuler précisément ce qui est vérifié, ce qui est conjecturé et ce qui reste à démontrer. La propriété générale sera étudiée au chapitre 02.

9.2. Ninon contre Grégory

★★★★

Ninon et Grégory veulent résoudre l'équation $(x-1)^2 = 9$.

• Ninon : « Les nombres dont le carré est 9 sont 3 et -3 . Je résous donc $x-1 = 3$ et $x-1 = -3$. »

• Grégory : « L'équation s'écrit aussi $(x-1)^2 - 9 = 0$. Je factorise le membre de gauche et j'obtiens un produit égal à 0, comme en 9.1. »

a) Mener la méthode de Ninon jusqu'au bout, puis factoriser comme Grégory. Quelles valeurs les deux écritures font-elles apparaître ?

b) Vérifier ces valeurs dans l'équation de départ. La factorisation suffit-elle déjà à prouver qu'il n'en existe aucune autre ?

c) Laquelle des deux méthodes réutilise la factorisation de ce chapitre ? Quelle propriété manque encore pour exploiter rigoureusement le produit nul ? (Réponse complète au chapitre 02.)