

Chapitre 1B : Calcul littéral

Développer, factoriser, démontrer : les identités remarquables



Point de départ

En 4^e, tu as appris à développer $k(a + b)$ et à réduire une expression. Ce chapitre franchit trois paliers :

- la double distributivité $(a + b)(c + d)$, que l'on démontrera au lieu de l'admettre ;
- les trois identités remarquables, démontrées par le calcul et par la géométrie : trois formules qui rendent le calcul rapide (201^2 ou $84^2 - 16^2$ de tête) et qui permettent de factoriser ;
- l'usage de la lettre pour démontrer un résultat vrai pour tous les nombres : « la somme de cinq entiers consécutifs est toujours un multiple de 5 » se vérifie sur des exemples, mais sa preuve générale demande un raisonnement valable pour tout entier.

Où cela mène : au chapitre 02, après Thalès direct, la factorisation débloquent la résolution d'équations comme $x^2 - 16 = 0$ (équations produits) ; au Brevet, les programmes de calcul et la factorisation de $a^2 - b^2$ sont des classiques ; au lycée, ces identités servent notamment à transformer des expressions avec des racines carrées, à compléter un carré et, plus tard, à dériver des fonctions.

Aucune virtuosité calculatoire n'est attendue : la difficulté de ce chapitre n'est jamais la longueur des calculs. Il faut reconnaître l'opération principale, justifier une transformation et contrôler qu'une égalité reste vraie. Les formules seront construites progressivement ; ne les apprends pas avant de les avoir comprises.

Automatismes

À faire mentalement, sans poser de calcul, puis à refaire de mémoire ; les réponses retournées ci-dessous servent à se corriger. Les questions 4 à 6 et 10 réactivent les chapitres précédents.

1. Développer $3(x - 4)$.

2. Réduire $6x + 5 - 4x + 2$.

3. Donner l'opposé de $7 - 2x$.

4. Calculer $2^3 \times 2^4$.

5. Rendre irréductible $\frac{42}{56}$.

6. Écrire 0,0035 en notation scientifique.

7. Calculer $(-5)^2$ puis -5^2 .

8. Factoriser $4x + 28$.

9. Calculer $x^2 - 3x$ pour $x = -2$.

10. Deux triangles semblables : que dire de leurs angles ?

Réponses, pour se corriger : (1) $3x - 12$ (2) $2x + 7$ (3) $-7 + 2x$ (4) $2^7 = 128$ (5) $\frac{7}{8}$ (6) $3,5 \times 10^{-3}$ (7) 25 et -25 (8) $4(x + 7)$ (9) $\frac{3}{4}$ (10) $(-2)^2 \times (-3) = -6$ et $-(-2)^2 = -4$

→ Au TD : bloc « Réactivation express » (chapitres précédents)

Activité d'introduction : le carré qui s'agrandit

Situation. Un maraîcher possède un potager carré de 10 m de côté. Il l'agrandit de 2 m dans les deux directions : le potager reste carré, de côté 12 m.

1. D'abord, sans aucun nombre. Regarde le côté du potager passer de a à $a + b$ (ici, de 10 à 12) : comment vois-tu la figure grandir ? Sur un croquis, montre où se place la surface gagnée, colorie-la, puis découpe-la en carrés et en rectangles. Écris, pour ta façon de voir, une expression de l'aire du grand carré. (Il y a plusieurs façons de découper : chacune donne une expression différente, garde la tienne.)

2. Karim affirme : « L'aire gagne $2^2 = 4 \text{ m}^2$, puisque chaque côté gagne 2 m. » Calcule l'ancienne aire et la nouvelle aire. Karim a-t-il raison ?

3. Recopie et complète le tableau suivant :

a	b	$(a + b)^2$	$a^2 + b^2$	écart entre les deux
10	2			
3	4			
5	1			
7	10			

4. Que constates-tu ? L'égalité $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ semble-t-elle vraie ? Compare chaque écart avec le produit $a \times b$: quelle conjecture peux-tu formuler sur la valeur exacte de $(a + b)^2$?

5. Reprends un carré de côté $a + b$, sans choisir de valeurs pour a et b . Découpe-le ou annote-le de façon à faire apparaître toute son aire ; justifie les dimensions de chaque pièce. Compare ensuite ce découpage à une autre façon d'organiser la surface : quelle relation y a-t-il entre les deux expressions d'aire obtenues, et comment chacune explique-t-elle le terme observé dans le tableau ?

Bilan, à compléter après la comparaison et la preuve.

La conjecture :

Ce qui la prouve ou la réfute pour toutes les valeurs :

2

1 Le statut de la lettre : somme ou produit ?

Expression littérale, variable, constante et valeur numérique

Une expression littérale est une suite d'opérations portant sur des nombres et sur des lettres qui représentent des nombres. Dans une même expression, une même lettre désigne toujours le même nombre.

Lorsqu'une lettre peut prendre plusieurs valeurs, c'est une variable. Lorsqu'elle désigne une valeur fixée dans la situation, c'est une constante. Évaluer une expression, ou calculer sa valeur numérique, consiste à remplacer chaque lettre par la valeur choisie puis à effectuer les calculs en respectant les priorités.

En clair : une expression littérale est un calcul en attente ; dès que l'on donne une valeur à la lettre, elle devient un nombre.

Pourquoi écrire une valeur négative entre parenthèses ?

Outil de démonstration : preuve directe, à partir de la définition de la valeur numérique.

Une lettre désigne un nombre : la remplacer par sa valeur ne change ni les opérations de l'expression ni leur ordre. Le signe $\times$ sous-entendu réapparaît donc : $3x$ signifie $3 \times x$, et pour $x = -4$ on écrit $3 \times (-4)$. C'est le nombre tout entier, signe compris, qui remplace la lettre : pour $x = -4$, x^2 devient $(-4)^2 = (-4) \times (-4) = 16$. Sans parenthèses, on écrirait -4^2 , qui se lit « l'opposé du carré de 4 » et vaut -16 : le carré ne porterait que sur 4, et ce ne serait plus la valeur de x^2 pour $x = -4$. ■

Modèle de rédaction V1 : calculer la valeur d'une expression pour une valeur donnée

Les étapes

- ① Recopier l'expression sans la transformer.
- ② Remplacer chaque occurrence de la lettre par sa valeur ; une valeur négative s'écrit entre parenthèses, et le signe $\times$ sous-entendu réapparaît.
- ③ Effectuer les puissances, puis les multiplications, puis les additions et soustractions.
- ④ Conclure par une phrase qui répond à la question.

Une expression donnée sous plusieurs formes se calcule avec la forme la plus rapide : voir la fin de la partie 4.

Sur la copie

Calculer $A = (2x + 5)^2 - 3x$ pour $x = -1$.

① $A = (2x + 5)^2 - 3x$. ② Pour $x = -1$:

$$A = (2 \times (-1) + 5)^2 - 3 \times (-1) \quad ②$$

$$= 3^2 + 3 = 9 + 3 = 12 \quad ③$$

④ Pour $x = -1$, $A = 12$.

→ Au TD : exercices 6.3 c), 6.6 c) et d) et 9.1 a) et c), en fin de chapitre (modèle V1)

Questions flash (sans aide)

1. Calculer $A = 2x^2 - 5x + 1$ pour $x = -3$.
2. Calculer $B = u(v + 2u) - v$ pour $u = 2$ et $v = 5$.
3. Dans la formule $P = 2\pi R$, quelles lettres peuvent varier lorsque l'on change de cercle ? Quel symbole désigne une constante ?

Réponses : 1) $2 \times (-3)^2 - 5 \times (-3) + 1 = 2 \times 9 + 15 + 1 = 34$; 2) $2 \times (5 + 2 \times 2) - 5 = 2 \times 9 - 5 = 13$; 3) P et R varient, tandis que π désigne une constante.

Somme et produit : la nature d'une expression

Après avoir respecté les parenthèses et les priorités, l'opération principale est celle qui porte sur l'expression entière. Elle détermine la nature de l'écriture :

- si l'opération principale est une addition ou une soustraction, l'expression est une somme ;
- si l'opération principale est une multiplication, l'expression est un produit.

On réécrit au besoin les soustractions comme des additions d'opposés : dans $4 - 9x = 4 + (-9x)$, les termes sont 4 et $-9x$. Les expressions ainsi additionnées au niveau principal sont les termes ; celles qui sont multipliées au niveau principal sont les facteurs. Un carré se lit comme un produit de deux facteurs identiques : $E^2 = E \times E$. De même, un quotient par un nombre se lit comme un produit : $\frac{x}{2} = \frac{1}{2} \times x$.

On lit E^2 « E au carré » ; on lit $3x$ « trois x » : c'est le produit $3 \times x$, le signe $\times$ étant sous-entendu entre un nombre et une lettre, entre deux lettres ou devant une parenthèse. En clair : pour connaître la nature d'une expression, on cherche la dernière opération que l'on effectuerait en la calculant ; c'est elle qui donne son nom à l'écriture.

Pourquoi ce tri décide de tout

Développer, c'est passer d'un produit à une somme, et factoriser, c'est passer d'une somme à un produit. Avant tout calcul, on se demande : « qu'est-ce que j'ai, et qu'est-ce que je veux ? »

$$\text{PRODUIT} \xrightarrow{\text{développer}} \text{SOMME} \qquad \text{SOMME} \xrightarrow{\text{factoriser}} \text{PRODUIT}$$

La flèche se lit « donne, en développant » puis « donne, en factorisant » : dans les deux sens, la valeur de l'expression ne change pas, seule son écriture change. Ainsi $6(x+1)$ est un produit et $6x+6$ une somme ; la distributivité simple assure pourtant que ces deux écritures ont la même valeur pour tout x .

Modèle de rédaction L1 : dire si une expression est une somme ou un produit

Les étapes

① Repérer l'opération principale : celle qui porte sur l'expression entière, c'est-à-dire le dernier calcul que l'on effectuerait ; un carré E^2 se lit $E \times E$.

② Conclure : addition ou soustraction, l'expression est une somme ; multiplication, c'est un produit.

③ Nommer ses termes, chacun avec son signe, ou ses facteurs.

Un signe $-$ ou une multiplication à l'intérieur d'une parenthèse n'est pas l'opération principale.

Sur la copie

Dire si chaque expression est une somme ou un produit, puis nommer ses termes ou ses facteurs : a) $8x+3$; b) $9-4x$; c) $4(x-6)$; d) $(3x+4)^2$; e) $7x^2$; f) $2(x+3)+x(x-1)$.

a) ① Dans $8x+3$, le dernier calcul est l'addition de $8x$ et de 3 : ② c'est une somme, ③ de termes $8x$ et 3 .

b) ① Dans $9-4x$, le dernier calcul est la soustraction de $4x$: ② c'est une somme, ③ de termes 9 et $-4x$.

c) ① Dans $4(x-6)$, le dernier calcul est la multiplication de 4 par $(x-6)$: ② c'est un produit, ③ de facteurs 4 et $(x-6)$.

d) ① Dans $(3x+4)^2$, qui se lit $(3x+4) \times (3x+4)$, le dernier calcul est la multiplication de $(3x+4)$ par $(3x+4)$: ② c'est un produit, ③ de facteurs $(3x+4)$ et $(3x+4)$.

e) ① Dans $7x^2$, qui se lit $7 \times x \times x$, le dernier calcul est une multiplication : ② c'est un produit, ③ de facteurs 7 , x et x .

f) ① Dans $2(x+3)+x(x-1)$, le dernier calcul est l'addition de $2(x+3)$ et de $x(x-1)$: ② c'est une somme, ③ de termes $2(x+3)$ et $x(x-1)$.

→ Au TD : exercice 1.1 (modèle L1)

Opposé d'une expression

Deux expressions sont opposées lorsque leur somme vaut 0 pour toutes les valeurs de la lettre. L'opposé d'une expression A se note $-A$; quand l'expression a plusieurs termes, on la met entre parenthèses : l'opposé de $4x-11$ s'écrit $-(4x-11)$.

On lit $-(4x-11)$ « l'opposé de $4x-11$ ». En clair : l'opposé d'une expression est ce qu'il faut lui ajouter pour obtenir 0 ; pour un nombre, c'est le même nombre avec le signe contraire, comme 7 et -7 .

Opposé d'une expression

L'opposé d'une expression s'obtient en changeant le signe de chacun de ses termes :

$$-(a+b) = -a-b \quad \text{et} \quad -(a-b) = -a+b.$$

Exemples : $-(2-9x) = -2+9x$; $-(6x-1) = -6x+1$.

On lit $-(a+b)$ « l'opposé de la somme de a et de b » ; le signe $-$ placé devant la parenthèse est un facteur -1 qui multiplie chaque terme. En clair : prendre l'opposé, c'est changer tous les signes, pas seulement le premier.

Pourquoi change-t-on le signe de chaque terme ?

Outil de démonstration : preuve directe, à partir de la définition de l'opposé.

La somme de $a+b$ et de $-a-b$ vaut $(a+b)+(-a-b) = a-a+b-b = 0$: par définition, $-a-b$ est donc l'opposé de $a+b$. De même, $(a-b)+(-a+b) = a-a-b+b = 0$, donc $-a+b$ est l'opposé de $a-b$. Un signe oublié casse cette somme nulle : $(4x-11)+(-4x-11) = -22$, et non 0 ; c'est pourquoi le contrôle du modèle L2 additionne l'expression et son opposé. ■

Modèle de rédaction L2 : donner l'opposé d'une expression

Les étapes

- ① Écrire l'opposé avec un signe $-$ devant l'expression mise entre parenthèses.
- ② Changer le signe de chacun de ses termes : $-(a+b) = -a-b$ et $-(a-b) = -a+b$.
- ③ Contrôler : la somme de l'expression et de son opposé vaut 0.

Sur la copie

Donner l'opposé de chaque expression : a) $7x-2$; b) $-x^2+4x-3$.

a) ① L'opposé de $7x-2$ s'écrit $-(7x-2)$. ② Je change le signe de chacun de ses termes : $-(7x-2) = \boxed{-7x+2}$.

③ Contrôle : $(7x-2) + (-7x+2) = 0$. ✓

b) ① L'opposé de $-x^2+4x-3$ s'écrit $-(-x^2+4x-3)$. ② Je change le signe de chacun de ses termes : $-(-x^2+4x-3) = \boxed{x^2-4x+3}$.

③ Contrôle : $(-x^2+4x-3) + (x^2-4x+3) = 0$. ✓

→ Au TD : exercices 1.2 b) et 6.1 c) (modèle L2)

Écrire « pair », « impair », « multiple de », « consécutifs »

Soit n un entier. Alors :

- $2n$ est un entier pair, et tout entier pair s'écrit ainsi ;
- $2n+1$ est un entier impair, et tout entier impair s'écrit ainsi ;
- un multiple de 3 s'écrit $3k$ (avec k entier) ; un multiple de 7 s'écrit $7k$; etc.
- des entiers consécutifs s'écrivent $n, n+1, n+2, \dots$; deux impairs consécutifs s'écrivent $2n+1$ et $2n+3$.

Ces écritures sont la porte d'entrée des démonstrations sur les entiers de la section 5.2.

On lit $2n$ « deux n » et $2n+1$ « deux n plus un » ; la lettre n désigne un entier quelconque, que l'on ne remplace par aucune valeur. En clair : dire « soit n un entier quelconque », c'est annoncer que tout ce qui suit vaut pour tous les entiers à la fois ; c'est ce qui donne aux démonstrations de la section 5.2 leur portée générale.

Questions flash (sans aide)

1. $1-6x$: somme ou produit ?
2. $(x+3)(x-7)$: somme ou produit ?
3. Donner l'opposé de $-5x+4$.
4. Écrire « le triple d'un entier, augmenté de 1 » avec la lettre n .
5. Écrire deux entiers pairs consécutifs.

Réponses : 1) somme ; 2) produit ; 3) $5x-4$; 4) $3n+1$; 5) $2n$ et $2n+2$.

Tester une formule ne suffit pas à la démontrer : la pyramide de cubes

Une pyramide comporte 1 cube au premier étage, 4 cubes au deuxième, 9 cubes au troisième, et ainsi de suite : l'étage numéro k contient k^2 cubes. On note S_n le nombre total de cubes d'une pyramide à n étages. On lit S_n « S indice n ». En clair : l'indice précise le nombre d'étages dont on parle ; ainsi S_3 est le total pour trois étages.

1. Calculer S_1, S_2, S_3 et S_4 . On obtient $S_1 = 1$, $S_2 = 1+4 = 5$, $S_3 = 1+4+9 = 14$ et $S_4 = 1+4+9+16 = 30$.
2. Trois formules sont proposées :

$$A_n = n^2, \quad B_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad C_n = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.$$

Les formules A_n et C_n sont-elles toutes deux réfutées dès $n=2$? Vérifier que B_n donne bien les quatre valeurs de la question 1.

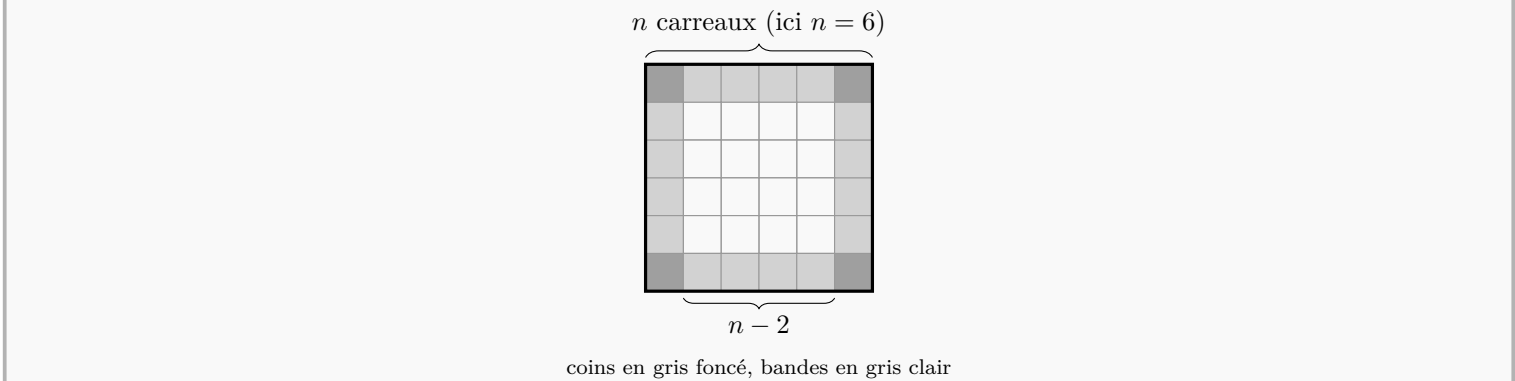
3. Ces quatre accords prouvent-ils que $B_n = S_n$ pour tout entier $n \geq 1$? Non : ils montrent seulement que la formule résiste à quatre tests. Une preuve générale pourrait partir du cas $n=1$, puis montrer que la formule ajoute exactement n^2 cubes à chaque passage de $n-1$ à n étages, pour tout entier $n \geq 2$. On lit $n \geq 1$ « n supérieur ou égal à 1 » : n vaut 1 ou plus.

4. En admettant la formule $S_n = B_n$, calculer le nombre de cubes pour 20 étages : $S_{20} = \frac{20 \times 21 \times 41}{6} = 10 \times 7 \times 41 = 2870$.

Leçon de méthode. Une valeur qui ne convient pas suffit à éliminer une formule universelle ; des valeurs qui conviennent, même nombreuses, ne la démontrent pas. Tester sert à réfuter ou à contrôler, jamais à remplacer une preuve.

Lecture guidée : les quatre sens du signe « = » sur le carré de mosaïque

Soit $n \geq 2$ un entier. On borde un carré avec des carreaux de mosaïque : dans le carré de taille n (n carreaux par côté), seule la couronne extérieure est carrelée. On note C le nombre de carreaux de la couronne.



Une même figure, quatre usages du signe « = » :

1. Une formule. Sur chaque côté, entre les deux coins, il reste $n - 2$ carreaux ; en ajoutant les 4 coins :

$$C = 4 \times (n - 2) + 4.$$

Ici, « = » relie deux grandeurs : C dépend de n .

2. Une identité. En découpant autrement : quatre bandes de $n - 1$ carreaux qui tournent autour du carré, chaque bande emportant un coin : on compte $C = 4 \times (n - 1)$. Deux comptages des mêmes carreaux, donc, pour tout entier $n \geq 2$:

$$4(n - 2) + 4 = 4(n - 1).$$

Ici, « = » signifie « toujours égal ». C’est une preuve par double comptage, et le calcul la confirme : $4(n - 2) + 4 = 4n - 8 + 4 = 4n - 4 = 4(n - 1)$.

3. Une évaluation. Pour $n = 8$: $C = 4 \times 7 = 28$; pour $n = 100$: $C = 4 \times 99 = 396$. Ici, « = » donne la valeur obtenue : on remplace la lettre, on calcule.

4. Une équation. Peut-on carreler une telle couronne avec 482 carreaux ? On cherche tous les entiers n tels que $4(n - 1) = 482$: ici, « = » exprime une condition sur l’inconnue. Or $4(n - 1)$ est un multiple de 4 et 482 n’en est pas un ($482 = 4 \times 120 + 2$) : l’ensemble des solutions est vide. Avec 492 carreaux, en revanche, $n - 1 = 123$, donc $n = 124$. Selon l’équation et le domaine, l’ensemble des solutions peut être vide, contenir une ou plusieurs valeurs (éventuellement une infinité) ou coïncider avec le domaine entier.

Bilan. Formule (relation entre grandeurs), identité (égalité affirmée sur tout un domaine), évaluation (valeur obtenue par substitution), équation (condition dont on cherche toutes les solutions) : quatre usages d’un même signe. Ce chapitre travaille surtout les identités ; les équations produits seront étudiées au chapitre 02.

Devant un signe « = » : quelle question faut-il poser ?

Statut	Question	Exemple et traitement
Formule	Quelles grandeurs sont reliées ?	$P = 2\pi R$: pour un cercle donné, on évalue P à partir de R .
Identité	Pourquoi les deux écritures sont-elles égales pour toutes les valeurs autorisées ?	$2(x + 3) = 2x + 6$: la distributivité transforme le membre de gauche en celui de droite.
Équation	Pour quelle(s) valeur(s) l’égalité devient-elle vraie ?	$2x + 3 = 11$: l’égalité est fausse pour la plupart des nombres et vraie pour $x = 4$.
Évaluation	Quelle valeur obtient-on après substitution ?	Pour $x = -2$, $x^2 - 3x = 10$.

Pour prouver une identité, on part d’un membre et on le transforme par des égalités justifiées jusqu’à obtenir l’autre. Pour réfuter une identité annoncée, un contre-exemple (une valeur pour laquelle l’égalité est fausse) suffit. Pour résoudre une équation, il faut trouver toutes les valeurs qui conviennent : quelques essais ne garantissent pas qu’il n’en existe pas d’autres.

Questions flash (sans aide)

1. $3(x - 2) = 3x - 6$: identité ou équation ? Justifier.
2. $3x - 6 = 0$: identité ou équation ? Donner une valeur qui convient et une qui ne convient pas.
3. L'affirmation $(x + 1)^2 = x^2 + 1$ est-elle une identité ? La réfuter si nécessaire.

Réponses : (1) identité, par distributivité ; (2) équation, vraie pour $x = 2$ et fausse par exemple pour $x = 0$; (3) non : pour $x = 1$, $(1 + 1)^2 = 4$ mais $1^2 + 1 = 2$, et $4 \neq 2$, qui se lit « 4 est différent de 2 ».

2 Développer et réduire

Développer

Développer un produit, c'est l'écrire sous la forme d'une somme qui lui est égale, en effectuant les multiplications. Développer et réduire, c'est ensuite écrire cette somme avec le moins de termes possible.

En clair : développer, c'est faire disparaître les parenthèses d'un produit en distribuant ; l'expression garde exactement la même valeur, seule son écriture change.

2.1 Distributivité simple (acquis de 4^e : à réactiver)

Distributivité simple

Pour tous nombres réels k, a, b :

$$k(a + b) = ka + kb \quad \text{et} \quad k(a - b) = ka - kb.$$

Comme la multiplication est commutative, on peut aussi distribuer par la droite :

$$(a + b)k = ak + bk \quad \text{et} \quad (a - b)k = ak - bk.$$

On lit $k(a + b)$ « k facteur de a plus b », et ka « k a », c'est-à-dire le produit $k \times a$. En clair : multiplier une somme par k , c'est multiplier chacun de ses termes par k .

Exemple

- $-3x(4 - 5x) = -3x \times 4 + (-3x) \times (-5x) = -12x + 15x^2$. Attention aux signes : $(-3x) \times (-5x) = +15x^2$.
- $2(4x + 3) - (5 - x) = 8x + 6 - 5 + x = 9x + 1$. Le signe $-$ devant la parenthèse est un facteur -1 : c'est l'opposé de l'expression.

Termes semblables, coefficient, réduire

Deux termes sont semblables lorsqu'ils ont exactement la même partie littérale : $5x^2$ et $-2x^2$ (partie littérale x^2), $3x$ et x (partie littérale x), 4 et -9 (aucune lettre). Le nombre qui multiplie la partie littérale est le coefficient du terme : dans $-2x^2$, le coefficient est -2 ; dans x , il vaut 1 . Réduire une somme, c'est regrouper ses termes semblables pour l'écrire avec le moins de termes possible ; on l'ordonne ensuite : les termes en x^2 , puis en x , puis le nombre. Exception : après une identité remarquable, le résultat garde l'ordre de la formule (modèle D2, partie 3).

En clair : réduire, ce n'est ni développer ni factoriser ; c'est ranger les x^2 avec les x^2 , les x avec les x et les nombres avec les nombres, jamais les uns avec les autres.

Pourquoi n'additionne-t-on que les coefficients ?

Outil de démonstration : la distributivité simple, lue de droite à gauche.

$6x - 4x = 6 \times x - 4 \times x = (6 - 4) \times x = 2x$: c'est la distributivité par la droite, $ak - bk = (a - b)k$, avec $k = x$. La partie littérale commune sort comme un facteur, et seuls les coefficients se calculent. Deux termes qui ne sont pas semblables ne se regroupent pas en un seul terme : pour $x = 1$, $3x^2 + 2x$ vaut 5 , ce qui ferait penser à $5x$ ou à $5x^2$; mais pour $x = 2$, $3x^2 + 2x$ vaut 16 , alors que $5x = 10$ et $5x^2 = 20$. ■

Modèle de rédaction L3 : réduire une expression

Les étapes

- ① Repérer les termes semblables : ceux qui ont exactement la même partie littérale (x^2 , x , ou aucune lettre).
- ② Regrouper séparément les termes en x^2 , les termes en x , puis les nombres, en écrivant leurs coefficients entre parenthèses.
- ③ Additionner seulement leurs coefficients et ordonner : x^2 , puis x , puis le nombre.

Sur la copie

Réduire : a) $7x + 4 - 3x - 8$; b) $2x^2 - 5x + x^2 + 8x - 1$.

a) ① Les termes semblables sont $7x$ et $-3x$, puis 4 et -8 .

$$7x + 4 - 3x - 8 = (7 - 3)x + (4 - 8) \quad \text{② je regroupe les termes semblables}$$

$$= \boxed{4x - 4} \quad \text{③ j'additionne les coefficients}$$

b) ① Les termes semblables sont $2x^2$ et x^2 , puis $-5x$ et $8x$; le nombre -1 est seul.

$$2x^2 - 5x + x^2 + 8x - 1 = (2 + 1)x^2 + (-5 + 8)x - 1 \quad \text{② je regroupe les termes semblables}$$

$$= \boxed{3x^2 + 3x - 1} \quad \text{③ j'additionne les coefficients}$$

→ Au TD : exercice 1.2 c) (modèle L3)

2.2 Double distributivité

Double distributivité

Pour tous nombres réels a, b, c, d :

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$

Chaque terme du premier facteur multiplie chaque terme du second : quatre produits.

On lit $(a + b)(c + d)$ « a plus b , facteur de c plus d ». En clair : on distribue a sur c et sur d , puis b sur c et sur d ; les deux produits croisés ad et bc sont ceux que l'on oublie le plus souvent.

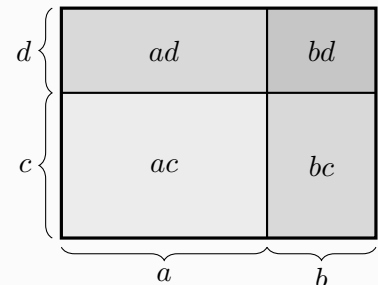
Lecture géométrique de la double distributivité (pour des longueurs positives)

Outil de démonstration : double comptage d'une aire (une même surface calculée de deux façons), valable pour des longueurs positives.

On considère un rectangle de longueur $a + b$ et de largeur $c + d$. En le partageant aux distances a et c , on obtient quatre rectangles (figure ci-contre).

L'aire du grand rectangle vaut $(a + b)(c + d)$. La somme des aires des quatre morceaux vaut $ac + ad + bc + bd$, donc

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd.$$



Cette figure explique les quatre produits et interdit d'oublier les deux produits croisés. Comme les dimensions d'un rectangle sont positives, elle ne traite que ce cas ; la démonstration algébrique suivante établit l'identité pour tous les réels. ■

Démonstration de la double distributivité (l'astuce $k = a + b$)

Outil de démonstration : preuve directe par un bloc baptisé k , à partir d'une propriété déjà connue.

On veut démontrer que $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$, en n'utilisant que la distributivité simple, déjà connue.

L'idée : on regarde $(a + b)$ comme un seul nombre, que l'on baptise k .

Étape 1. On pose $k = a + b$. Alors :

$$(a + b)(c + d) = k(c + d) = kc + kd \quad (\text{distributivité simple, } k \text{ distribué sur } c + d).$$

Étape 2. On remplace k par sa valeur $a + b$, et on redistribue :

$$kc = (a + b)c = ac + bc \quad \text{et} \quad kd = (a + b)d = ad + bd \quad (\text{distributivité simple, deux fois}).$$

Étape 3. En recollant :

$$(a + b)(c + d) = ac + bc + ad + bd = ac + ad + bc + bd.$$

Dans la dernière égalité, on a seulement permuté les deux termes centraux : l'addition est commutative. La double distributivité se déduit ainsi de trois applications de la distributivité simple, puis d'une permutation des termes d'une somme. Donc, pour tous nombres réels a, b, c et d , $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$. ■

Une ligne d'égalité doit rester une égalité

Écrire $(2x + 3)(x - 4) = 2x^2 - 8x + 3x - 12 = 2x^2 - 5x - 12$ est légitime parce que chaque étape remplace une expression par une expression de même valeur. En revanche, on n'écrit jamais dans une même chaîne une consigne, un calcul et son résultat comme s'ils étaient égaux. Chaque signe « = » affirme que les deux membres ont la même valeur.

▲ Les erreurs classiques du développement

1. Oublier les produits croisés : $(x + 2)(x + 5) = x^2 + 10$ n'est pas une identité : pour $x = 1$, $(1 + 2) \times (1 + 5) = 18$ mais $1^2 + 10 = 11$, et $18 \neq 11$. Le développement correct est $x^2 + 7x + 10$.
2. Perdre un signe : dans $(x - 4)(3x + 2)$, le -4 multiplie les deux termes de la seconde parenthèse. Pourquoi l'erreur est fréquente : on lit « 4 » et on oublie que le signe fait partie du terme.
3. Distribuer un $-$ à moitié : soustraire un groupe revient à ajouter son opposé, $A - B = A + (-1)B$. Ainsi $2(4x + 3) - (5 - x) = 8x + 6 - 5 + x$, et non $8x + 6 - 5 - x$: le facteur -1 change le signe de chaque terme du groupe.

Questions flash (sans aide)

1. Développer et réduire $(x + 4)(x + 2)$.
2. Développer et réduire $(3x - 1)(x + 5)$.
3. Développer et réduire $2(3x - 4) - (5 - x)$.

Réponses : 1) $x^2 + 6x + 8$; 2) $3x^2 + 14x - 5$; 3) $6x - 8 - 5 + x = 7x - 13$.

→ Au TD : exercices 1.2 a), 1.3, 1.4, 3.6 a) et 6.1 c) (modèle D1) ; exercice 1.5 : reprendre la démonstration de la double distributivité (rédaction : modèle J1, section 5.2)

3 Les trois identités remarquables

3.1 Découverte géométrique : le carré de la somme

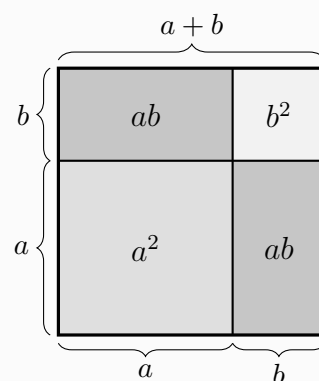
On reprend le potager de l'activité : un carré de côté $a + b$ se découpe naturellement en quatre morceaux, comme sur la figure de la preuve ci-dessous.

Preuve géométrique de $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$)

Outil de démonstration : double comptage d'une aire.

On considère un grand carré de côté $a + b$, partagé comme sur la figure ci-contre en deux carrés (de côtés a et b) et deux rectangles égaux (de dimensions a et b).

1. L'aire du grand carré est $S = (a + b)^2$.
2. Les aires des morceaux sont : a^2 pour le premier carré, b^2 pour le second, et ab pour chacun des deux rectangles.
3. La somme des quatre aires est $S' = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$. On lit S' « S prime » : un second nom d'aire, celle de la somme des morceaux.
4. Les quatre morceaux recouvrent exactement le grand carré, d'où $S = S'$. Donc, pour tous nombres réels $a \geq 0$ et $b \geq 0$, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. ■



Remarque honnête : cette preuve représente a et b par des longueurs, donc suppose $a \geq 0$ et $b \geq 0$ (une pièce peut être dégénérée, c'est-à-dire aplatie, d'aire nulle, si une longueur est nulle). La preuve algébrique ci-dessous, elle, vaut pour tous les nombres réels, y compris négatifs : c'est sa supériorité.

3.2 Les trois identités, démontrées

Les trois identités remarquables

Pour tous nombres réels a et b :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Le terme $2ab$ s'appelle le double produit. Ces égalités sont des identités : elles sont vraies pour toutes les valeurs de a et b .

On lit $(a + b)^2$ « a plus b , le tout au carré » : les parenthèses signalent que c'est la somme entière qui est élevée au carré ; on lit $a^2 + 2ab + b^2$ « a au carré, plus deux $a b$, plus b au carré ». En clair : le carré d'une somme n'est pas la somme des carrés, il faut lui ajouter le double produit ; le carré d'une différence lui ressemble, le double produit étant retranché ; et le produit de la somme par la différence des mêmes nombres est la différence de leurs carrés. « Pour tous nombres réels a et b » signifie que l'on peut remplacer a et b par n'importe quels nombres, négatifs ou décimaux compris, sans que l'égalité cesse d'être vraie.

Démonstration algébrique des trois identités

Outil de démonstration : calcul direct à partir de la double distributivité.

Il suffit de développer par double distributivité : les identités remarquables ne sont que des développements que l'on a appris par cœur parce qu'ils reviennent sans cesse.

1. Carré de la somme.

$$(a + b)^2 = (a + b)(a + b) = a \times a + a \times b + b \times a + b \times b = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

2. Carré de la différence. (Attention à la règle des signes : $(-b) \times (-b) = +b^2$.)

$$(a - b)^2 = (a - b)(a - b) = a \times a + a \times (-b) + (-b) \times a + (-b) \times (-b) = a^2 - ab - ab + b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

3. Produit « somme par différence ». (Les deux produits croisés s'annulent.)

$$(a + b)(a - b) = a \times a + a \times (-b) + b \times a + b \times (-b) = a^2 - ab + ab - b^2 = a^2 - b^2.$$

Chaque calcul n'utilise que la double distributivité, vraie pour tous les nombres. Donc, pour tous nombres réels a et b , $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ et $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. ■

Pourquoi garder les deux preuves ?

La preuve géométrique rend visible l'origine du double produit : deux rectangles d'aire ab . Elle suppose toutefois que a et b représentent des longueurs positives. La preuve algébrique traite aussi les valeurs négatives. Par exemple, avec $a = -3$ et $b = 5$:

$$(-3 + 5)^2 = 2^2 = 4$$

et

$$(-3)^2 + 2 \times (-3) \times 5 + 5^2 = 9 - 30 + 25 = 4.$$

Le dessin donne l'idée ; le calcul fixe le domaine complet de validité.

▲ Le piège central du chapitre

Les égalités $(a + b)^2 = a^2 + b^2$ et $(a - b)^2 = a^2 - b^2$ ne sont pas des identités.

Contre-exemple chiffré pour la première égalité (un seul suffit !) : pour $a = 3$ et $b = 4$:

$$(3 + 4)^2 = 7^2 = 49 \quad \text{mais} \quad 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25.$$

Ce qui manque, c'est le double produit $2ab = 2 \times 3 \times 4 = 24$, et $25 + 24 = 49$. Ce contre-exemple réfute la phrase « pour tous a et b » ; il ne dit pas que l'égalité échoue pour chaque couple de valeurs. Pour la seconde égalité, trouver un contre-exemple est l'objet de l'exercice 2.4 b) du TD. La mise au carré ne « traverse » pas les additions : elle ne traverse que les multiplications, car $(ab)^2 = a^2b^2$.

3.3 Le carré de la différence, vu par la géométrie : le carré évidé

Preuve géométrique de $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (pour $0 < b < a$)

Outil de démonstration : double comptage d'une aire, puis isolement du carré cherché.

Cette fois, on part d'un grand carré de côté a , et le carré étudié, de côté $a - b$, est à l'intérieur : c'est le coin en bas à gauche de la figure ci-contre.

1. Le grand carré, d'aire a^2 , est partagé en quatre morceaux : le carré d'aire $(a - b)^2$, deux rectangles de dimensions b et $a - b$, et un petit carré d'aire b^2 . Donc :

$$a^2 = (a - b)^2 + 2b(a - b) + b^2.$$

2. On isole le carré évidé :

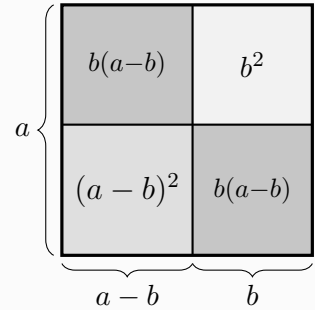
$$(a - b)^2 = a^2 - 2b(a - b) - b^2.$$

3. On développe $2b(a - b) = 2ab - 2b^2$ (distributivité simple) :

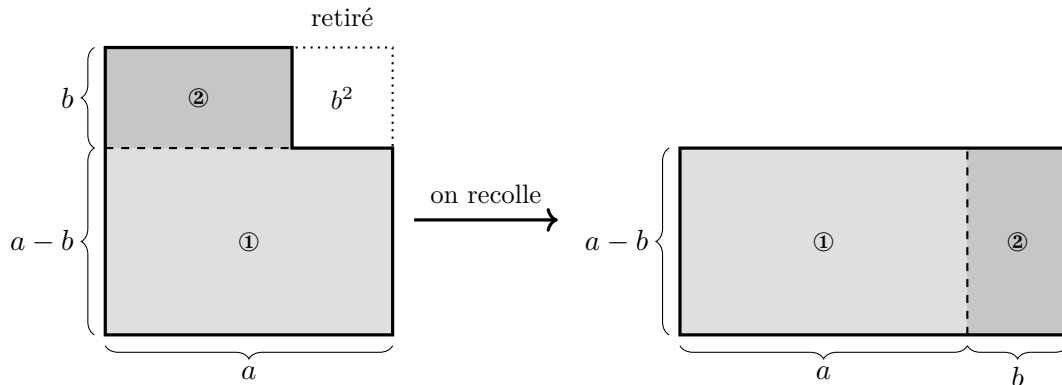
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 = a^2 - 2ab + b^2.$$

Donc, pour tous réels a et b tels que $0 < b < a$, $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$. ■

Lecture imagée : pour obtenir le carré évidé, on retire deux bandes d'aire ab chacune ($2b(a - b) + 2b^2 = 2ab$)... mais ces deux bandes se chevauchent sur le petit carré b^2 , retiré deux fois : on le rend une fois. D'où $a^2 - 2ab + b^2$.



3.4 La différence de deux carrés, vue par la géométrie : découper et recoller



pièce ① : rectangle $a \times (a - b)$

pièce ② : rectangle $b \times (a - b)$, pivotée puis recollée à droite

Preuve géométrique de $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ (pour $0 < b < a$)

Outil de démonstration : découpage et recollement, l'aire étant conservée.

1. À gauche : dans un carré de côté a (aire a^2), on retire un petit carré de côté b dans un coin. La surface restante, en forme de L, a pour aire $a^2 - b^2$.
2. On découpe ce L en deux pièces le long du trait pointillé : la pièce ①, rectangle $a \times (a - b)$, et la pièce ②, rectangle $b \times (a - b)$.
3. On fait pivoter la pièce ② et on la recolle au bout de la pièce ① : on obtient un rectangle de largeur $a - b$ et de longueur $a + b$, donc d'aire $(a + b)(a - b)$.
4. Découper et recoller ne change pas l'aire. Donc, pour tous nombres réels a et b tels que $0 < b < a$, $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$. ■

3.5 Développer avec une identité

Modèle de rédaction D2 : développer avec une identité remarquable

Les étapes

- ① Identifier a et b : a est le premier bloc, b le second, blocs entiers, coefficients compris (dans $(3x+5)^2$, $a = 3x$, pas x).
 - ② Écrire la formule avec ces blocs : $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$; chaque bloc s'écrit entre parenthèses, sauf un nombre écrit seulement avec des chiffres ou une lettre seule : $(2x)^2$, mais 9^2 et x^2 .
 - ③ Calculer chaque morceau : $(3x)^2 = 9x^2$, le carré porte sur le coefficient et sur la lettre.
 - ④ Contrôler avec $x = 1$: l'expression de départ et le résultat doivent avoir la même valeur.
- Les identités valent pour tous les nombres a et b : on peut donc remplacer a et b par des blocs entiers, comme $2x$. Le résultat garde l'ordre de la formule, même quand le nombre est le premier bloc. Si l'expression contient déjà la lettre a , on écrit la formule avec A et B : « J'utilise $(A+B)(A-B) = A^2 - B^2$ avec $A = a$ et $B = 3$. »

Sur la copie

Développer et réduire : a) $(2x+9)^2$; b) $(5x+2)(5x-2)$; c) $(5-x)^2$.

a) ① J'utilise $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 9$.

$$(2x+9)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 9 + 9^2 \quad ②$$

$$= \boxed{4x^2 + 36x + 81} \quad ③$$

④ Contrôle ($x = 1$) : $11^2 = 121$ et $4 + 36 + 81 = 121$. ✓

b) ① J'utilise $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ avec $a = 5x$ et $b = 2$.

$$(5x+2)(5x-2) = (5x)^2 - 2^2 \quad ②$$

$$= \boxed{25x^2 - 4} \quad ③$$

④ Contrôle ($x = 1$) : $7 \times 3 = 21$ et $25 - 4 = 21$. ✓

c) ① J'utilise $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 5$ et $b = x$.

$$(5-x)^2 = 5^2 - 2 \times 5 \times x + x^2 \quad ②$$

$$= \boxed{25 - 10x + x^2} \quad ③$$

④ Contrôle ($x = 1$) : $4^2 = 16$ et $25 - 10 + 1 = 16$. ✓

À toi de compléter : $(3x-8)^2$

J'utilise $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = \dots\dots\dots$ et $b = \dots\dots\dots$

$$(3x-8)^2 = (\dots\dots\dots)^2 - 2 \times \dots\dots\dots \times \dots\dots\dots + (\dots\dots\dots)^2 = \dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Contrôle pour $x = 1$: $(3-8)^2 = \dots\dots\dots$; ton développement donne-t-il la même valeur ?

Réponses : $a = 3x$ et $b = 8$; $(3x)^2 - 2 \times 3x \times 8 + 8^2 = 9x^2 - 48x + 64$; pour $x = 1$, $(3-8)^2 = 25$ et $9 - 48 + 64 = 25$.

Deux exemples moins standards, et un piège

- Avec des fractions : $\left(\frac{1}{3} + x\right)\left(\frac{1}{3} - x\right) = \left(\frac{1}{3}\right)^2 - x^2 = \frac{1}{9} - x^2$.
- Avec un nombre décimal : $(y-3,5)^2 = y^2 - 2 \times y \times 3,5 + 3,5^2 = y^2 - 7y + 12,25$.
- Le piège : $(x+3)(x-5)$ n'est ni un carré ni une « somme par différence » ($3 \neq 5$) : aucune identité remarquable ne s'applique, on revient à la double distributivité, $x^2 - 5x + 3x - 15 = x^2 - 2x - 15$.

Modèle de rédaction D1 (suite) : une expression qui contient un carré

Les étapes du modèle D1. Quand l'expression contient un carré et d'autres produits, on développe chaque produit à part, une ligne par produit (le carré avec le modèle D2), puis on remplace dans l'expression, chaque développement entre parenthèses. Un seul contrôle, sur l'expression entière.

Sur la copie

Développer et réduire $(x+4)^2 - 3(x-1)$.

① Je développe chaque produit à part.

J'utilise $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 4$: $(x+4)^2 = x^2 + 2 \times x \times 4 + 4^2 = x^2 + 8x + 16$.

$3(x-1) = 3 \times x + 3 \times (-1) = 3x - 3$.

$(x+4)^2 - 3(x-1) = (x^2 + 8x + 16) - (3x - 3)$ ② je remplace chaque produit par son développement

$= x^2 + 8x + 16 - 3x + 3$ ② le signe $-$ change le signe de chaque terme de la parenthèse

$= \boxed{x^2 + 5x + 19}$ ③ je regroupe les termes semblables

④ Contrôle ($x = 1$) : $5^2 - 3 \times 0 = 25$ et $1 + 5 + 19 = 25$. ✓

→ Au TD : exercices 2.1, 2.2, 3.5 et 6.1 a) (modèle D2) ; 6.3 a) et 6.6 a) (modèles D2 et D1) 📖 facultatifs : exercices 2.5 à 2.7

3.6 Identité, contre-exemple : prouver ou réfuter

Identité, expressions égales, contre-exemple

Une identité est une égalité entre deux expressions littérales qui est vraie pour toutes les valeurs des lettres : c'est le cas de $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Deux expressions reliées par une identité sont dites égales : elles ont la même valeur pour toutes les valeurs des lettres. Un contre-exemple à une affirmation « pour tout nombre » est un cas précis où elle est fausse : une valeur des lettres pour laquelle les deux membres n'ont pas la même valeur.

On lit $9 \neq 5$ « 9 est différent de 5 ». En clair : une identité ne tombe jamais en panne ; il suffit d'une seule panne, un contre-exemple, pour qu'une égalité ne soit pas une identité.

Pourquoi un seul contre-exemple suffit-il ?

Outil de démonstration : le sens du mot « tout ».

L'affirmation « pour tout nombre x , $(x+12)^2 = x^2 + 144$ » dit que l'égalité est vraie pour chaque valeur de x , sans exception. Pour $x = 1$, $(1+12)^2 = 169$ mais $1^2 + 144 = 145$: une seule valeur qui ne convient pas contredit « pour tout », donc l'affirmation est fausse. En revanche, des exemples qui conviennent, même nombreux, ne prouvent pas une identité : pour $x = 0$, $(0+12)^2 = 144 = 0^2 + 144$, et pourtant l'égalité n'est pas une identité. Une identité se prouve par une chaîne d'égalités justifiées (modèle J1, section 5.2). ■

Modèle de rédaction T3 : réfuter une affirmation générale par un contre-exemple

Les étapes

① Choisir l'exemple le plus simple : $x = 1$ d'abord (pour deux lettres, $a = 1$ et $b = 1$; pour des entiers, les plus petits entiers strictement positifs qui conviennent), sinon le plus simple qui convient.

② Calculer, pour cet exemple, ce que l'affirmation compare : les deux membres d'une égalité, ou le nombre en jeu.

③ Conclure : l'affirmation est fausse pour cet exemple, donc elle n'est pas vraie pour tous les nombres.

On essaie $x = 1$ d'abord ; si les deux membres sont égaux pour cette valeur, on essaie la valeur suivante la plus simple, et la copie ne montre que le contre-exemple retenu.

Sur la copie

Montrer que chaque affirmation est fausse. a) Pour tout nombre x , $(x+2)^2 = x^2 + 4$. b) Pour tous nombres a et b , $(a+b)^2 = a^2 + ab + b^2$. c) La somme de deux entiers consécutifs est paire.

a) ① Pour $x = 1$, ② $(x+2)^2 = 3^2 = 9$ mais $x^2 + 4 = 1 + 4 = 5$: ③ comme $9 \neq 5$, l'égalité n'est pas vraie pour tout nombre x .

b) ① Pour $a = 1$ et $b = 1$, ② $(a+b)^2 = 2^2 = 4$ mais $a^2 + ab + b^2 = 1 + 1 + 1 = 3$: ③ comme $4 \neq 3$, l'égalité n'est pas vraie pour tous les nombres a et b .

c) ① Pour les entiers consécutifs 1 et 2, ② la somme vaut $1 + 2 = 3$, et 3 n'est pas pair : ③ l'affirmation « la somme de deux entiers consécutifs est paire » n'est pas vraie pour tous les entiers.

Modèle de rédaction T2 : répondre à un « vrai ou faux »

Les étapes

- ① Annoncer la réponse : vrai ou faux.
- ② Justifier. Égalité entre nombres donnés : calculer séparément les deux membres et les comparer. Affirmation générale fausse : donner un contre-exemple. Affirmation générale vraie : citer la règle du cours ou démontrer.

Une affirmation qui commence par « il existe » se prouve avec un seul exemple.

Sur la copie

Vrai ou faux ? a) Pour tout nombre x , $(3x-2)^2 = 3x^2 - 2$. b) Pour tout nombre x , $(x+2)(x-2) + 4 = x^2$. c) $7^2 + 24^2 = 25^2$. d) Il existe un nombre x pour lequel $(x+1)^2 = x^2 + 1$.

a) ① FAUX. ② Pour $x = 2$, $(3x-2)^2 = 4^2 = 16$ mais $3x^2 - 2 = 12 - 2 = 10$: comme $16 \neq 10$, l'égalité n'est pas vraie pour tout nombre x .

b) ① VRAI. ② Je développe le membre de gauche. J'utilise $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ avec $a = x$ et $b = 2$: $(x+2)(x-2) + 4 = x^2 - 2^2 + 4 = x^2 - 4 + 4 = x^2$. Donc, pour tout nombre x , $(x+2)(x-2) + 4 = x^2$. ■

c) ① VRAI. ② Je calcule séparément les deux membres : $7^2 + 24^2 = 49 + 576 = 625$ et $25^2 = 625$. Les deux membres sont égaux.

d) ① VRAI. ② Il suffit d'un exemple : pour $x = 0$, $(0+1)^2 = 1$ et $0^2 + 1 = 1$: les deux membres sont égaux pour $x = 0$, donc un tel nombre existe.

→ Au TD : exercice 2.4 (modèle T2 ; a), b), e) et f) : modèle T3 ; d) : modèle J1) ; exercices 3.6 b), 4.5 a), b) et d), 5.4 f) et 6.5 c) (modèle T3)

Questions flash (sans aide)

- Développer $(x+6)^2$.
- Développer $(5x-2)^2$.
- Développer $(6x+5)(6x-5)$.
- Vrai ou faux : $(a-b)^2 = a^2 - 2ab - b^2$? Donner un contre-exemple chiffré si c'est faux.

Réponses : 1) $x^2 + 12x + 36$; 2) $25x^2 - 20x + 4$; 3) $36x^2 - 25$; 4) faux : pour $a = 1$ et $b = 1$, $(a-b)^2 = 0$ mais $a^2 - 2ab - b^2 = 1 - 2 - 1 = -2$.

4 Factoriser

Factoriser

Factoriser une expression, c'est la réécrire sous la forme d'un produit égal à l'expression initiale. Une écriture est factorisée lorsque son opération principale est une multiplication. On utilise alors la distributivité ou une identité remarquable dans le sens opposé au développement. Une factorisation n'est généralement pas unique.

En clair : factoriser, c'est faire le chemin inverse du développement et revenir à un produit ; l'expression garde exactement la même valeur, seule son écriture change.

4.1 Premier outil : le facteur commun

Mise en facteur

Pour tous nombres réels k , a , b :

$$ka + kb = k(a+b) \quad \text{et} \quad ka - kb = k(a-b).$$

On dit qu'on a mis k en facteur. Le facteur commun k peut être un nombre, une lettre ou une expression entière entre parenthèses.

On lit $ka + kb = k(a+b)$ de gauche à droite : « k a plus k b égale k facteur de a plus b ». En clair : ce qui est commun aux deux termes sort devant la parenthèse ; ce qui reste de chaque terme s'écrit dedans.

Pourquoi la mise en facteur ne change-t-elle pas la valeur ?

Outil de démonstration : la distributivité simple, lue de droite à gauche.

La distributivité donne $k(a+b) = ka + kb$ pour tous nombres k , a et b . Une égalité se lit dans les deux sens : $ka + kb = k(a+b)$. Factoriser, c'est donc appliquer la propriété qui sert à développer, de droite à gauche ; c'est pour cela qu'on contrôle une factorisation en redéveloppant. Par exemple, $6x + 10 = 2 \times 3x + 2 \times 5 = 2(3x + 5)$, et en redéveloppant $2(3x + 5) = 6x + 10$. ■

Factorisation exacte ou factorisation complète ?

$12x^2 - 18x = 3x(4x - 6)$ et $12x^2 - 18x = 6x(2x - 3)$ sont deux factorisations exactes. La seconde extrait le plus grand facteur entier commun aux coefficients (leur PGCD, défini au chapitre 00) et toute la puissance commune de x : elle est plus complète. Sauf consigne contraire, on cherche cette forme, puis on contrôle en redéveloppant.

Modèle de rédaction F1 : factoriser par un facteur commun (nombre, lettre)

Les étapes

- ① Chercher le facteur commun à tous les termes : le plus grand diviseur commun des coefficients, et chaque lettre présente dans tous les termes, avec son plus petit exposant.
- ② Écrire chaque terme comme un produit qui fait apparaître ce facteur, et souligner le facteur commun.
- ③ Écrire le facteur commun devant une parenthèse et, dans la parenthèse, ce qui reste de chaque terme, avec son signe : $ka + kb = k(a + b)$ et $ka - kb = k(a - b)$.
- ④ Contrôler en redéveloppant le produit obtenu.

Quand l'énoncé impose le facteur commun, la phrase ① le cite : « L'énoncé impose le facteur commun $4x$: $4x$ divise $16x^2$ et $28x$. »

Sur la copie

Factoriser : a) $14x^2 - 21x$; b) $6 + 3x$; c) $x^2 + 9x$; d) $12a + 20b$.

a) ① Le facteur commun est $7x$: 7 est le plus grand diviseur commun de 14 et de 21, et x est présent dans les deux termes, avec le plus petit exposant 1.

$$14x^2 - 21x = \underline{7x} \times 2x - \underline{7x} \times 3 \quad \text{② je fais apparaître le facteur commun}$$

$$= \boxed{7x(2x - 3)} \quad \text{③ je mets } 7x \text{ en facteur}$$

④ Contrôle : $7x(2x - 3) = 14x^2 - 21x$. ✓

b) ① Le facteur commun est 3 : 3 est le plus grand diviseur commun de 6 et de 3, et x n'est pas présent dans le terme 6.

$$6 + 3x = \underline{3} \times 2 + \underline{3} \times x \quad \text{② je fais apparaître le facteur commun}$$

$$= \boxed{3(2 + x)} \quad \text{③ je mets 3 en facteur}$$

④ Contrôle : $3(2 + x) = 6 + 3x$. ✓

c) ① Le facteur commun est x : 1 et 9 n'ont pas d'autre diviseur commun que 1, et x est présent dans les deux termes, avec le plus petit exposant 1.

$$x^2 + 9x = \underline{x} \times x + \underline{x} \times 9 \quad \text{② je fais apparaître le facteur commun}$$

$$= \boxed{x(x + 9)} \quad \text{③ je mets } x \text{ en facteur}$$

④ Contrôle : $x(x + 9) = x^2 + 9x$. ✓

d) ① Le facteur commun est 4 : 4 est le plus grand diviseur commun de 12 et de 20, et aucune lettre n'est présente dans les deux termes.

$$12a + 20b = \underline{4} \times 3a + \underline{4} \times 5b \quad \text{② je fais apparaître le facteur commun}$$

$$= \boxed{4(3a + 5b)} \quad \text{③ je mets 4 en facteur}$$

④ Contrôle : $4(3a + 5b) = 12a + 20b$. ✓

→ Au TD : exercice 3.1 (modèle F1)

Pourquoi peut-on mettre une parenthèse en facteur ?

Outil de démonstration : une parenthèse vue comme un seul nombre, comme le bloc $k = a + b$ de la section 2.2.

Une parenthèse comme $(x - 5)$ désigne un nombre, quelle que soit la valeur de x . La propriété $ka + kb = k(a + b)$ s'applique donc avec $k = (x - 5)$:

$$(x - 5)(x + 1) + (x - 5)(x + 4) = (x - 5)[(x + 1) + (x + 4)] = (x - 5)(2x + 5).$$

On lit $[(x + 1) + (x + 4)]$ « crochet, $x + 1$ plus $x + 4$, crochet ». En clair : le crochet joue le rôle d'une parenthèse qui en contient d'autres. Un carré contient aussi le facteur commun, car $(x - 5)^2 = (x - 5) \times (x - 5)$. ■

Pourquoi une identité permet-elle de factoriser, et pourquoi redévelopper ?

Outil de démonstration : une égalité se lit dans les deux sens.

Les trois identités de la section 3.2 sont vraies pour tous les nombres ; lues de droite à gauche, elles transforment une somme en produit :

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b), \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2, \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2.$$

Pour s'en servir, il faut reconnaître a et b : d'où l'étape qui « photographie » la structure (nombre de termes, carrés, double produit). Si le terme central ne vaut pas exactement $2ab$, l'expression n'est pas un carré parfait. Le contrôle se fait en redéveloppant : cette égalité littérale établit que la factorisation redonne l'expression de départ pour toute valeur de la lettre. Une substitution numérique peut détecter une erreur, mais l'accord pour une seule valeur ne prouve pas une identité. ■

Modèle de rédaction F3 : factoriser avec une identité remarquable

Les étapes

① Photographier la structure : deux termes qui sont des carrés, séparés par un signe $-$, c'est une différence de deux carrés ; trois termes dont les deux extrêmes sont des carrés, c'est peut-être un carré parfait.

② Écrire chaque carré sous la forme $(\dots)^2$ pour nommer a et b ; pour trois termes, vérifier que le terme central vaut exactement $2 \times a \times b$ et lire son signe.

③ Appliquer l'identité, en gardant les blocs entre parenthèses : $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$, $a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2$.

④ Réduire l'intérieur de chaque facteur ; si un nombre est commun à tous les termes d'un facteur, le mettre en facteur.

⑤ Contrôler en redéveloppant le produit obtenu.

Quand l'ordre est inversé, a est le premier terme écrit : dans $1 - 10x + 25x^2$, $1 = 1^2$ et $25x^2 = (5x)^2$, donc $1 - 10x + 25x^2 = (1 - 5x)^2$.

Sur la copie

Factoriser : a) $9x^2 - 100$; b) $16x^2 - 56x + 49$; c) $4x^2 - 64$.

a) ① Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. ② $9x^2 = (3x)^2$ et $100 = 10^2$, donc $a = 3x$ et $b = 10$.

$$\begin{aligned} 9x^2 - 100 &= (3x)^2 - 10^2 & \text{②} \\ &= \boxed{(3x + 10)(3x - 10)} & \text{③ } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \end{aligned}$$

⑤ Contrôle : $(3x + 10)(3x - 10) = (3x)^2 - 10^2 = 9x^2 - 100$. ✓

b) ① Trois termes, et les deux extrêmes sont des carrés : c'est peut-être un carré parfait.

② $16x^2 = (4x)^2$ et $49 = 7^2$, donc $a = 4x$ et $b = 7$; le double produit vaut $2 \times 4x \times 7 = 56x$: c'est bien le terme central, précédé du signe $-$.

$$\begin{aligned} 16x^2 - 56x + 49 &= (4x)^2 - 2 \times 4x \times 7 + 7^2 & \text{②} \\ &= \boxed{(4x - 7)^2} & \text{③ } a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \end{aligned}$$

⑤ Contrôle : $(4x - 7)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 7 + 7^2 = 16x^2 - 56x + 49$. ✓

c) ① Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. ② $4x^2 = (2x)^2$ et $64 = 8^2$, donc $a = 2x$ et $b = 8$.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 64 &= (2x)^2 - 8^2 & \text{②} \\ &= (2x + 8)(2x - 8) & \text{③ } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \\ &= 2(x + 4) \times 2(x - 4) = \boxed{4(x + 4)(x - 4)} & \text{④ je mets 2 en facteur dans chaque facteur} \end{aligned}$$

⑤ Contrôle : $4(x + 4)(x - 4) = 4(x^2 - 4^2) = 4x^2 - 64$. ✓

À toi de compléter : factoriser $81x^2 - 4$

Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : $81x^2 = (\dots)^2$ et $4 = (\dots)^2$. Donc :

$$81x^2 - 4 = (\dots + \dots)(\dots - \dots).$$

Contrôle en redéveloppant :

Réponses : $81x^2 = (9x)^2$ et $4 = 2^2$; $81x^2 - 4 = (9x)^2 - 2^2 = (9x + 2)(9x - 2)$; contrôle : $(9x + 2)(9x - 2) = 81x^2 - 4$.

Modèle de rédaction F3 (suite) : un bloc au carré, un nombre manquant

Les étapes du modèle F3.

Quand a ou b est un bloc entre parenthèses, on le garde entier, entre crochets ; le contrôle développe les deux écritures jusqu'à la même forme réduite.

Quand l'énoncé dit déjà que l'expression est un carré parfait et demande un nombre manquant, on suit les étapes ②, ③ et ⑤.

Sur la copie

a) Factoriser $(2x + 5)^2 - 49$. b) Trouver un nombre manquant pour que $x^2 + \dots x + 121$ soit un carré parfait.

a) ① Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. ② $(2x + 5)^2$ est le carré du bloc $2x + 5$ et $49 = 7^2$, donc $a = 2x + 5$ et $b = 7$.

$$(2x + 5)^2 - 49 = (2x + 5)^2 - 7^2 \quad \text{②}$$

$$= [(2x + 5) + 7][(2x + 5) - 7] \quad \text{③ } a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$= (2x + 12)(2x - 2) \quad \text{④ je réduis chaque facteur}$$

$$= 2(x + 6) \times 2(x - 1) = \boxed{4(x + 6)(x - 1)} \quad \text{④ je mets 2 en facteur dans chaque facteur}$$

⑤ Contrôle : $4(x + 6)(x - 1) = 4(x^2 - x + 6x - 6) = 4x^2 + 20x - 24$ et $(2x + 5)^2 - 49 = 4x^2 + 20x + 25 - 49 = 4x^2 + 20x - 24$. ✓

b) $x^2 + \dots x + 121$: ② $x^2 = x^2$ et $121 = 11^2$, donc $a = x$ et $b = 11$; le double produit vaut $2 \times x \times 11 = 22x$. ③ Le nombre manquant peut être $\boxed{22 \text{ ou } -22}$: $x^2 + 22x + 121 = (x + 11)^2$ et $x^2 - 22x + 121 = (x - 11)^2$.

⑤ Contrôle : $(x + 11)^2 = x^2 + 2 \times x \times 11 + 11^2 = x^2 + 22x + 121$ et $(x - 11)^2 = x^2 - 2 \times x \times 11 + 11^2 = x^2 - 22x + 121$. ✓

▲ Quand aucune identité ne s'applique

Peut-on factoriser $x^2 - 10$? La structure est bien « carré moins quelque chose »... mais 10 n'est le carré d'aucun entier ($3^2 = 9$ et $4^2 = 16$), et aucun nombre connu dans ce chapitre n'a pour carré 10 (on l'admet). On ne peut donc pas encore nommer b : le blocage est provisoire. Au chapitre 02, le nombre positif dont le carré vaut 10 sera défini et noté $\sqrt{10}$, que l'on lit « racine carrée de 10 ». En clair : $\sqrt{10} \times \sqrt{10} = 10$, et $\sqrt{10}$ est compris entre 3 et 4. On pourra alors écrire

$$x^2 - 10 = x^2 - (\sqrt{10})^2 = (x + \sqrt{10})(x - \sqrt{10}).$$

En revanche, $x^2 + 64$ (avec un $+$) n'est pas une différence de deux carrés, ni un carré parfait, qui aurait trois termes : aucune des trois identités ne transforme une somme de deux carrés en produit, et ce blocage n'est pas provisoire dans le cadre du chapitre. Un verdict mathématique précise toujours les outils et le cadre dans lesquels il est formulé.

Questions flash (sans aide)

1. Factoriser $9x - 54$.

4. Factoriser $9x^2 - 64$.

2. Factoriser $x^2 - 100$.

3. Factoriser $x^2 + 16x + 64$.

5. Peut-on factoriser $x^2 + 9$ avec une identité remarquable ?

Réponses : 1) $9(x - 6)$; 2) $(x + 10)(x - 10)$; 3) $(x + 8)^2$; 4) $(3x + 8)(3x - 8)$; 5) non : $x^2 + 9$ est une somme de deux carrés ; ce n'est ni une différence de deux carrés ni un carré parfait, qui aurait trois termes.

→ Au TD : exercices 2.3, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 c), 6.1 b), 6.6 b) et 9.1 b) (modèle F3) ; exercice 3.6 (modèles D1, T3 et F3)  facultatif : exercice 3.7 (groupement de termes, méthode donnée dans l'énoncé)

Une expression, trois formes, trois informations

On considère

$$J = (5x + 1)^2 - 16.$$

1. Forme de départ. Elle montre une différence entre un carré et 16. Pour $x = -\frac{1}{5}$, le bloc $5x + 1$ vaut 0, donc $J = -16$ sans développement.
2. Forme développée : $J = 25x^2 + 10x + 1 - 16 = 25x^2 + 10x - 15$. Elle rassemble l'expression en trois termes ordonnés.
3. Forme factorisée.

$$J = (5x + 1)^2 - 4^2 = [(5x + 1) + 4][(5x + 1) - 4] = (5x + 5)(5x - 3) = 5(x + 1)(5x - 3).$$

Elle montre immédiatement que $J = 0$ pour $x = -1$: un facteur est alors nul. Les équations produits seront traitées au chapitre 02 ; ici, on observe seulement l'information rendue visible.

4. Contrôle croisé pour $x = -\frac{1}{5}$:

$$25 \times \frac{1}{25} + 10 \times \left(-\frac{1}{5}\right) - 15 = 1 - 2 - 15 = -16 \quad \text{et} \quad 5 \times \left(-\frac{1}{5} + 1\right) \times (-1 - 3) = 5 \times \frac{4}{5} \times (-4) = -16.$$

Une forme n'est pas « meilleure » dans l'absolu : la bonne écriture est celle qui montre l'information recherchée avec le moins d'opérations.

Modèle de rédaction V1 (suite) : choisir la forme

Les étapes du modèle V1 (partie 1). Quand l'expression est donnée sous plusieurs formes, une phrase choisit la forme avant l'étape ①, et dit pourquoi.

Sur la copie

On sait que $B = 2x^2 - x - 28 = (x - 4)(2x + 7)$. Calculer B pour $x = 4$, en choisissant la forme la plus rapide.

Je choisis la forme factorisée, car pour $x = 4$ le facteur $x - 4$ vaut 0 : le produit est nul sans autre calcul. ① $B = (x - 4)(2x + 7)$. ② Pour $x = 4$:

$$B = (4 - 4) \times (2 \times 4 + 7) \quad \text{②}$$

$$= 0 \times 15 = 0 \quad \text{③}$$

④ Pour $x = 4$, $\boxed{B = 0}$.

→ Au TD : exercices 6.3 c) et 6.6 c) et d) (modèle V1, avec le choix de la forme)

5 Le calcul malin, et démontrer avec des lettres

5.1 Les identités comme outil de vitesse

Calcul astucieux

Calculer astucieusement, c'est réécrire un calcul sans changer sa valeur, de façon que les opérations restantes soient plus simples. Un nombre « rond » (10, 100, 1 000...) est souvent un indice : un nombre proche d'un nombre rond s'écrit « nombre rond plus ou moins un petit nombre », comme $105 = 100 + 5$. Mais l'indice ne détermine pas à lui seul l'outil : identité remarquable ou distributivité.

En clair : on ne calcule pas plus vite en calculant plus fort, mais en choisissant une écriture où il ne reste que des calculs faciles.

Pourquoi les identités servent-elles à calculer de tête ?

Outil de démonstration : une identité est vraie pour tous les nombres.

Les identités de la section 3.2 sont vraies pour tous les nombres a et b , donc aussi pour $a = 100$ et $b = 5$:

$$105^2 = (100 + 5)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 5 + 5^2 = 10\,000 + 1\,000 + 25 = 11\,025.$$

Avec a rond et b petit, chaque terme se calcule de tête : trois secondes de calcul, sans calculatrice. Le résultat est exact, car l'identité est démontrée pour tous les nombres : ce n'est pas une approximation. ■

Modèle de rédaction C1 : calculer de tête un carré ou un produit proche d'un nombre rond

Les étapes

① Écrire chaque nombre comme un nombre rond a plus ou moins un petit nombre b , puis nommer l'outil : $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $(a + b)(a - b)$, ou la distributivité quand un seul facteur est proche d'un nombre rond.

② Appliquer la formule avec ces nombres.

③ Calculer chaque terme de tête, puis le résultat.

④ Contrôler : le chiffre des unités et l'ordre de grandeur.

Pour $(a - b)^2$, même rédaction : $298^2 = (300 - 2)^2 = 90\,000 - 1\,200 + 4 = 88\,804$. Avec des nombres décimaux, le contrôle porte sur le dernier chiffre : $20,2 \times 19,8 = 20^2 - 0,2^2 = 399,96$ se termine comme $2 \times 8 = 16$, par 6.

Sur la copie

Calculer de tête : a) 302^2 ; b) 302×298 ; c) 23×999 .

a) ① J'utilise $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 300$ et $b = 2$, car $302 = 300 + 2$.

$$302^2 = (300 + 2)^2 = 300^2 + 2 \times 300 \times 2 + 2^2 \quad ②$$

$$= 90\,000 + 1\,200 + 4 = \boxed{91\,204} \quad ③$$

④ Contrôle : le chiffre des unités est celui de $2 \times 2 = 4$, et 91 204 est un peu plus grand que $300^2 = 90\,000$. ✓

b) ① J'utilise $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ avec $a = 300$ et $b = 2$, car $302 = 300 + 2$ et $298 = 300 - 2$.

$$302 \times 298 = (300 + 2)(300 - 2) = 300^2 - 2^2 \quad ②$$

$$= 90\,000 - 4 = \boxed{89\,996} \quad ③$$

④ Contrôle : le chiffre des unités est celui de $2 \times 8 = 16$, soit 6, et 89 996 est un peu plus petit que $300^2 = 90\,000$. ✓

c) ① J'utilise la distributivité $k(a - b) = ka - kb$ avec $k = 23$, $a = 1\,000$ et $b = 1$, car $999 = 1\,000 - 1$ et seul 999 est proche d'un nombre rond.

$$23 \times 999 = 23 \times (1\,000 - 1) = 23 \times 1\,000 - 23 \times 1 \quad ②$$

$$= 23\,000 - 23 = \boxed{22\,977} \quad ③$$

④ Contrôle : le chiffre des unités est celui de $3 \times 9 = 27$, soit 7, et 22 977 est un peu plus petit que $23 \times 1\,000 = 23\,000$. ✓

Applicable ne signifie pas toujours avantageux

Tout produit de deux nombres u et v peut, sur les réels, être centré autour de leur moyenne :

$$uv = \left(\frac{u+v}{2} - \frac{u-v}{2} \right) \left(\frac{u+v}{2} + \frac{u-v}{2} \right) = \left(\frac{u+v}{2} \right)^2 - \left(\frac{u-v}{2} \right)^2.$$

Ainsi, $47 \times 999 = 523^2 - 476^2$ est une égalité correcte, mais elle rend le calcul plus difficile. La distributivité $47 \times 999 = 47 \times (1\,000 - 1) = 46\,953$ est ici plus économique. Une méthode est « maligne » seulement si elle est à la fois exacte et moins coûteuse.

Modèle de rédaction C2 : calculer de tête en reconnaissant la forme développée d'une identité

Les étapes

① Reconnaître la forme et nommer a et b : $a^2 - b^2$, $a^2 + 2ab + b^2$ ou $a^2 - 2ab + b^2$.

② Écrire le produit correspondant : $(a + b)(a - b)$, $(a + b)^2$ ou $(a - b)^2$.

③ Calculer de tête les parenthèses, puis la seule multiplication qui reste.

④ Contrôler le chiffre des unités.

Une différence de deux carrés devient une seule multiplication ; un carré parfait devient le carré d'un nombre rond. Avec le signe $-$, même rédaction : $63^2 - 2 \times 63 \times 3 + 3^2 = (63 - 3)^2 = 60^2 = 3\,600$. Avec des nombres décimaux, $9,5^2 - 0,5^2 = (9,5 + 0,5)(9,5 - 0,5) = 10 \times 9 = 90$; le contrôle porte sur les chiffres après la virgule : $9,5^2$ et $0,5^2$ se terminent tous deux par 25 après la virgule, comme $5 \times 5 = 25$, donc leur différence n'a pas de chiffre après la virgule.

Sur la copie

Calculer de tête : a) $76^2 - 24^2$; b) $38^2 + 2 \times 38 \times 2 + 2^2$.

a) ① J'utilise $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = 76$ et $b = 24$.

$$76^2 - 24^2 = (76 + 24)(76 - 24) \quad ②$$

$$= 100 \times 52 = \boxed{5\,200} \quad ③$$

④ Contrôle : 76^2 se termine comme $6 \times 6 = 36$, par 6 ; 24^2 se termine comme $4 \times 4 = 16$, par 6 ; la différence se termine donc par 0, comme 5 200. ✓

b) ① J'utilise $a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$ avec $a = 38$ et $b = 2$.

$$38^2 + 2 \times 38 \times 2 + 2^2 = (38 + 2)^2 \quad ②$$

$$= 40^2 = \boxed{1\,600} \quad ③$$

④ Contrôle : les chiffres des unités des trois termes sont 4, 2 et 4, et $4 + 2 + 4 = 10$ se termine par 0, comme 1 600. ✓

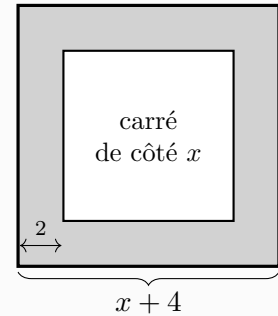
→ Au TD : exercices 4.1, 4.4 a) à c), 4.5 c) et 6.4 a) et b) (modèle C1) ; exercices 4.2, 4.3 a), 4.4 d) et 6.4 c) (modèle C2)

Une bordure carrée : développer ou factoriser une aire

Un carré intérieur a pour côté x mètres. Une bordure de 2 m de largeur l'entoure : le grand carré a donc pour côté $x + 4$.

L'aire de la bordure est notée $\mathcal{A}$, que l'on lit « A rond ». En clair : $\mathcal{A}$ est le nom donné à cette aire, en mètres carrés. C'est la différence des aires :

$$\mathcal{A} = (x + 4)^2 - x^2.$$



Deux transformations donnent deux lectures : en développant, puis, plus directement, en factorisant,

$$\mathcal{A} = x^2 + 8x + 16 - x^2 = 8x + 16 \quad \text{et} \quad \mathcal{A} = [(x + 4) + x][(x + 4) - x] = (2x + 4) \times 4 = 8(x + 2).$$

Pour $x = 6$, le contrôle géométrique donne $10^2 - 6^2 = 100 - 36 = 64$, et la forme factorisée donne $8 \times (6 + 2) = 64$.

Modèle de rédaction T1 : rédiger la solution d'un problème

Les étapes

- ① Écrire ce que l'on sait : les données, avec leurs unités, converties dans des unités compatibles ; faire un schéma si besoin.
- ② Écrire ce que l'on cherche, et l'outil : l'opération, justifiée par une phrase ou une formule.
- ③ Calculer, avec le modèle adapté.
- ④ Conclure : une phrase qui répond à la question, avec l'unité.
- ⑤ Vérifier : ordre de grandeur, vraisemblance ou calcul inverse.

Sur la copie

Une photo carrée de 15 cm de côté est collée au centre d'un carton carré de 17 cm de côté. Calculer de tête l'aire de la partie visible du carton.

- ① Je sais que le carton est un carré de 17 cm de côté et que la photo, collée au centre, est un carré de 15 cm de côté.
- ② Je cherche l'aire $\mathcal{A}$ de la partie visible du carton : c'est l'aire du carton moins l'aire de la photo, donc $\mathcal{A} = 17^2 - 15^2$, en cm^2 .
- ③ J'utilise $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = 17$ et $b = 15$: $\mathcal{A} = (17 + 15)(17 - 15) = 32 \times 2 = 64$.
- ④ Conclusion : la partie visible du carton a une aire de 64 cm^2 .
- ⑤ Vérification : la partie visible est une bande de 1 cm de large autour de la photo ; sa ligne médiane mesure environ $4 \times 16 = 64$ cm, d'où une aire d'environ $64 \times 1 = 64 \text{ cm}^2$. ✓

→ Au TD : exercice 4.3 a) et b) (modèle T1 ; calcul de a) : modèle C2) 📖 facultatif : exercice 4.6

5.2 Démontrer un résultat général : de la conjecture à la preuve

La boîte à outils du démonstrateur, version calcul littéral

Ce chapitre contient plusieurs démonstrations complètes. Chaque encadré de démonstration indique en première ligne l'outil qu'il emploie ; voici les quatre outils principaux.

1. Preuve directe par le calcul littéral. On choisit un nombre quelconque, désigné par une lettre que l'on ne remplace jamais, et l'on enchaîne des égalités justifiées (distributivité, identité, réduction) jusqu'à la forme qui prouve : $5(n + 2)$ pour un multiple de 5, $2k + 1$ pour un impair. C'est l'outil de toute cette section.
2. Double comptage d'une aire. On calcule une même surface de deux façons ; les deux résultats sont égaux. Cet outil rend visible l'origine d'une formule, mais il ne vaut que pour des longueurs positives : la preuve algébrique achève le travail (partie 3).
3. Baptiser un bloc. On donne un nom à une expression entière ($k = a + b$) pour lui appliquer un résultat déjà connu, puis on redéveloppe le bloc (section 2.2).
4. Contre-exemple. Pour réfuter une égalité annoncée « pour tous les nombres », un seul exemple chiffré suffit : $(3 + 4)^2 = 49$ alors que $3^2 + 4^2 = 25$. À l'inverse, une liste finie d'exemples favorables ne démontre pas l'énoncé pour tous les réels.

Complément : tester une valeur simple ($x = 0$ ou $x = 1$) peut détecter une erreur, mais ne prouve pas une identité pour tout x ; une identité se démontre par une chaîne d'égalités valable pour toutes les valeurs.

Conjecturer n'est pas démontrer

Une conjecture est une affirmation proposée à partir d'observations et qui reste à démontrer. Pour un énoncé portant sur tous les nombres d'un ensemble infini, une liste finie d'exemples établit seulement les cas testés : elle ne couvre pas l'énoncé universel. Dans les situations de cette section, la démonstration choisit un nombre quelconque, précise ce que la lettre désigne, puis enchaîne des égalités justifiées. En revanche, un seul contre-exemple suffit à réfuter une affirmation universelle.

On lit « pour tout entier n » : l'affirmation est vraie quel que soit l'entier choisi. En clair : une conjecture est une idée à prouver ; tant que la preuve n'est pas écrite, elle reste une idée, même après mille essais réussis.

Modèle de rédaction J3 : tester une affirmation sur des exemples et conjecturer

Les étapes

- ① Calculer chaque exemple, en écrivant le calcul.
- ② Écrire ce que l'on constate ; si l'énoncé le demande, formuler la conjecture : « Il semble que... ».
- ③ Dire ce que les exemples établissent : seulement les cas testés ; pour tous les nombres, il faut une démonstration.

Sur la copie

Calculer la somme de deux entiers consécutifs sur trois exemples, formuler une conjecture, puis dire ce que ces exemples établissent.

- ① $5 + 6 = 11$; $12 + 13 = 25$; $40 + 41 = 81$.
- ② Ces trois sommes sont impaires. Il semble que la somme de deux entiers consécutifs soit toujours impaire.
- ③ Ces exemples établissent seulement les cas testés : l'affirmation porte sur une infinité d'entiers, il faut donc une démonstration avec une lettre.

→ Au TD : exercices 5.1 d), 5.2 a), 5.4 a) et c) et 6.5 a) (modèle J3)

Programme de calcul

Un programme de calcul est une suite d'instructions à effectuer dans l'ordre, à partir d'un nombre de départ. Avec un nombre de départ quelconque, noté x , le programme produit une expression littérale ; le résultat obtenu pour un nombre donné est la valeur de cette expression pour ce nombre.

En clair : une expression littérale est un programme de calcul écrit sur une seule ligne ; $2(3x + 1)$ se lit « choisir x , le multiplier par 3, ajouter 1, multiplier le résultat par 2 ».

Pourquoi des parenthèses quand on traduit un programme ?

Outil de démonstration : les priorités opératoires.

Le résultat d'une instruction est un seul nombre. Quand l'instruction suivante le multiplie ou l'élève au carré, c'est ce nombre tout entier qui est multiplié : on le met entre parenthèses. Avec le programme « choisir x , ajouter 6, multiplier par 4 », le résultat est $4(x + 6)$; sans parenthèses, $4 \times x + 6$ ne multiplierait que x par 4. Pour $x = 1$, le programme donne $(1 + 6) \times 4 = 28$, alors que $4 \times 1 + 6 = 10$. ■

Modèle de rédaction P1 : utiliser un programme de calcul

Les étapes

- ① Partir du nombre de départ : le nombre donné, ou x pour un nombre quelconque.
- ② Effectuer les instructions dans l'ordre, un calcul par instruction ; avec x , mettre entre parenthèses le résultat précédent quand l'instruction suivante le multiplie ou l'élève au carré.
- ③ Écrire le résultat ; avec x , développer et réduire l'expression obtenue.

Avec un nombre, les calculs s'écrivent sur une ligne, séparés par « ; » ; avec x , une ligne par instruction.

Sur la copie

Programme : choisir un nombre ; le multiplier par -3 ; ajouter 8 ; multiplier le résultat par 2. a) Calculer le résultat avec 4 au départ. b) Vérifier que le nombre de départ 2 donne 4. c) Exprimer le résultat en fonction du nombre de départ x .

a) ① Avec 4 au départ : ② $4 \times (-3) = -12$; $-12 + 8 = -4$; $-4 \times 2 = -8$. ③ Le résultat est $\boxed{-8}$.

b) ① Avec 2 au départ : ② $2 \times (-3) = -6$; $-6 + 8 = 2$; $2 \times 2 = 4$. ③ J'obtiens bien 4. ✓

c) ① Avec x au départ :

② Je multiplie par -3 : $-3x$.

J'ajoute 8 : $-3x + 8$.

Je multiplie le résultat par 2 : $2(-3x + 8)$.

③ Le résultat est $2(-3x + 8) = 2 \times (-3x) + 2 \times 8 = \boxed{-6x + 16}$.

Pourquoi peut-on effectuer la même opération sur les deux membres ?

Outil de démonstration : deux nombres égaux sont un seul et même nombre.

Si $A = B$, les deux membres désignent le même nombre ; un même calcul appliqué à ce nombre donne un même résultat : $A + c = B + c$, $A - c = B - c$, $A \times c = B \times c$, et, si $c \neq 0$, $\frac{A}{c} = \frac{B}{c}$. On transforme ainsi l'égalité « expression = résultat voulu », une opération par ligne, jusqu'à isoler x . On ne divise jamais par 0 : c'est pourquoi on précise $c \neq 0$. La vérification finale, qui applique le programme au nombre trouvé, contrôle qu'aucune erreur de calcul n'a été commise. ■

Modèle de rédaction P2 : trouver le nombre de départ qui donne un résultat voulu

Les étapes

- ① Écrire l'égalité « expression du programme = résultat voulu ».
- ② Résoudre : effectuer la même opération sur les deux membres, une par ligne, jusqu'à obtenir $x = \dots$
- ③ Conclure par une phrase qui répond à la question.
- ④ Vérifier en appliquant le programme au nombre trouvé.

Sur la copie

Avec le même programme, dont le résultat est $-6x + 16$: quel nombre de départ faut-il choisir pour obtenir 22 ?

- ① Je cherche x tel que $-6x + 16 = 22$.

$$-6x + 16 = 22$$

$$-6x = 22 - 16 = 6 \quad \text{② je soustrais 16 aux deux membres}$$

$$x = \frac{6}{-6} = -1 \quad \text{② je divise les deux membres par } -6$$

- ③ Conclusion : il faut choisir $\boxed{-1}$ comme nombre de départ.

- ④ Vérification : $(-1) \times (-3) = 3$; $3 + 8 = 11$; $11 \times 2 = 22$. ✓

→ Au TD : exercices 5.1 a) à c), 5.2 et 5.3 a) à c) (modèle P1) ; exercices 5.1 c) et 5.3 d) (modèle P2)

Deux programmes : les essais suggèrent, le calcul démontre

Programme A : choisir un nombre ; le multiplier par 5 ; ajouter 7 ; soustraire le nombre de départ ; ajouter 3.

Programme B : choisir un nombre ; le multiplier par 2 ; ajouter 5 ; multiplier le résultat par 2.

Avec 1, 2 puis 3, les deux programmes donnent respectivement 14, 18 et 22. Cela suggère qu'ils sont équivalents, mais ne traite que trois nombres.

Soit x un nombre quelconque. Le programme A donne $5x + 7 - x + 3 = 4x + 10$; le programme B donne $2(2x + 5) = 4x + 10$. Les deux expressions sont égales à $4x + 10$. Donc, pour tout nombre x , les deux programmes donnent le même résultat. ■ Ici, la preuve n'est pas la liste d'essais ; c'est la réduction des deux résultats à une même expression.

Pourquoi une chaîne d'égalités prouve-t-elle une identité ?

Outil de démonstration : preuve directe par le calcul littéral.

Chaque égalité de la chaîne applique une règle vraie pour tous les nombres (distributivité, identité remarquable, réduction) : chaque maillon est donc vrai pour toute valeur de x , et la chaîne relie le premier membre au second pour toute valeur de x . C'est la question à poser devant une identité (partie 1, tableau « Devant un signe = ») : on part d'un membre et on le transforme par des égalités justifiées jusqu'à obtenir l'autre, ou l'on transforme chaque membre jusqu'à une même expression. Des essais numériques, eux, ne traitent que les valeurs essayées. ■

Modèle de rédaction J1 : démontrer qu'une égalité est vraie pour tout nombre

Les étapes

- ① Partir d'un membre, en général celui que l'on peut développer ou réduire.
- ② Le transformer par une chaîne d'égalités justifiées, une étape par ligne, jusqu'à obtenir l'autre membre (ou transformer chaque membre jusqu'à une même expression).
- ③ Conclure : « Donc, pour tout nombre x , ... », puis ■.

Dans une démonstration, un produit se développe en une ligne, produits déjà calculés.

Sur la copie

Démontrer que, pour tout nombre x : a) $(x+2)(x+6) - (x+4)^2 = -4$; b) $(3x+1)^2 - 1 = 3x(3x+2)$.

a) ① Je développe le membre de gauche.

$$(x+2)(x+6) - (x+4)^2$$

$$= x^2 + 6x + 2x + 12 - (x^2 + 8x + 16) \quad \text{② double distributivité, puis } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= x^2 + 6x + 2x + 12 - x^2 - 8x - 16 \quad \text{② le signe } - \text{ change le signe de chaque terme de la parenthèse}$$

$$= -4$$

② je regroupe les termes semblables

③ Je retrouve le membre de droite. Donc, pour tout nombre x ,

$$(x+2)(x+6) - (x+4)^2 = -4. \quad \blacksquare$$

b) ① Je développe chaque expression.

$$(3x+1)^2 - 1 = 9x^2 + 6x + 1 - 1 = 9x^2 + 6x \quad \text{② } (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$3x(3x+2) = 9x^2 + 6x$$

② distributivité simple

③ Les deux expressions sont égales à $9x^2 + 6x$. Donc, pour tout nombre x , $(3x+1)^2 - 1 = 3x(3x+2)$. ■

→ Au TD : exercices 1.5, 2.4 d), 4.3 c), 5.1 d), 5.2 b) et 6.3 b) (modèle J1)

Exemple complet : la différence des carrés de deux entiers pairs consécutifs

Question. Que peut-on dire de la différence des carrés de deux entiers pairs consécutifs ?

Étape 1 : expérimenter, au tableur ou à la main. Pour un entier n , les deux entiers pairs consécutifs $2n$ et $2n+2$ donnent la différence $(2n+2)^2 - (2n)^2$:

n	0	1	4	12	125
$2n$	0	2	8	24	250
$2n+2$	2	4	10	26	252
$(2n+2)^2 - (2n)^2$	4	12	36	100	1 004

(Au tableur : A2 = n, B2 = (2*A2+2)^2 - (2*A2)^2, puis on étire vers le bas.)

Étape 2 : conjecturer. Les cinq résultats sont des multiples de 4 : $4 = 4 \times 1$, $12 = 4 \times 3$, $36 = 4 \times 9$, $100 = 4 \times 25$ et $1\,004 = 4 \times 251$. Il semble que la différence soit toujours un multiple de 4. Les cas calculés sont établis, mais l'affirmation portant sur tous les entiers n'est pas encore démontrée.

Étape 3 : démontrer. Soit n un entier quelconque ; les deux entiers pairs consécutifs sont $2n$ et $2n+2$. Deux méthodes :

Méthode 1 (factorisation par $a^2 - b^2$) :

$$(2n+2)^2 - (2n)^2 = [(2n+2) + 2n] [(2n+2) - 2n] = (4n+2) \times 2 = 8n+4 = 4(2n+1).$$

Méthode 2 (développement) :

$$(2n+2)^2 - (2n)^2 = 4n^2 + 8n + 4 - 4n^2 = 8n + 4 = 4(2n+1).$$

Or n est un entier, donc $2n+1$ est un entier : $4(2n+1)$ est un multiple de 4.

Étape 4 : conclure et vérifier. Donc, pour tout entier n , la différence des carrés de deux entiers pairs consécutifs est un multiple de 4 ; mieux, elle vaut $4(2n+1)$, quatre fois un nombre impair. ■ Contrôle sur la table : pour $n = 12$, $4(2n+1) = 4 \times 25 = 100$. ✓

Comparaison des deux méthodes : le développement est plus automatique ; la factorisation donne en prime la raison du résultat : la différence est le produit de la somme des deux nombres, $4n+2$, par leur écart, 2. C'est la factorisation qui se généralisera le mieux (au TD : et si les entiers sont des impairs consécutifs ?).

Modèle de rédaction J2 : démontrer une propriété des nombres entiers

Les étapes

- ① Choisir la lettre et dire ce qu'elle désigne : « Soit n un entier quelconque », puis écrire avec elle les nombres de l'énoncé (consécutifs n , $n + 1$; pair $2n$; impair $2n + 1$).
- ② Calculer, développer ou factoriser : une chaîne d'égalités, une étape par ligne, sans jamais remplacer n par un nombre.
- ③ Reconnaître la forme obtenue : « Or... » ($3k$ est un multiple de 3, $2k + 1$ est impair), en disant pourquoi k est un entier.
- ④ Conclure : « Donc, pour tout entier n , ... », puis ■.

Sur la copie

Démontrer que la somme de quatre entiers pairs consécutifs est un multiple de 4.

- ① Soit n un entier quelconque. Quatre entiers pairs consécutifs s'écrivent $2n$, $2n + 2$, $2n + 4$ et $2n + 6$.
- ② Je calcule leur somme :

$$2n + (2n + 2) + (2n + 4) + (2n + 6) = 8n + 12 \quad \text{② je regroupe les termes semblables}$$

$$= 4(2n + 3) \quad \text{② je mets 4 en facteur}$$

- ③ Or n est un entier, donc $2n + 3$ est un entier : $4(2n + 3)$ est un multiple de 4.
- ④ Donc, pour tout entier n , la somme de quatre entiers pairs consécutifs est un multiple de 4. ■

→ Au TD : exercices 5.4 d) et e) et 6.5 b) (modèle J2)

Questions flash (sans aide)

1. Calculer 49×51 de tête.
2. Calculer $59^2 - 41^2$ en une seule multiplication.
3. Écrire deux entiers consécutifs dont le plus grand est n .
4. « $n^2 + n + 41$ est premier pour $n = 1, 2$ et 3 » : cela prouve-t-il qu'il est premier pour tout entier n ?

Réponses : 1) $(50 - 1)(50 + 1) = 2500 - 1 = 2499$; 2) $(59 + 41)(59 - 41) = 100 \times 18 = 1800$; 3) n et $n + 1$; 4) non, les trois calculs établissent seulement les trois cas testés (et pour $n = 41, 41^2 + 41 + 41 = 41 \times 43$ n'est pas premier).

→ Au TD : bloc transversal « Justifier et raisonner »  facultatifs : exercices 5.5 à 5.8

6 Les erreurs classiques du chapitre

▲ Les erreurs classiques

1. $(a + b)^2 = a^2 + b^2$: l'erreur reine. Pourquoi on la commet : on croit que « mettre au carré » se distribue comme une multiplication. Contre-exemple : $(3 + 4)^2 = 49 \neq 25$. Le double produit $2ab$ n'est pas une option.
2. $(2x)^2 = 2x^2$: le carré porte sur tout le facteur : $(2x)^2 = 4x^2$. Pourquoi : on ne voit que la lettre, pas le coefficient.
3. Écrire $-(3 - 8x) = -3 - 8x$: le signe $-$ doit changer chaque terme : $-(3 - 8x) = -3 + 8x$. Pourquoi : on s'arrête au premier terme.
4. Factoriser $x^2 - 169$ en $(x - 13)^2$: confusion entre $a^2 - b^2$ (deux termes) et $(a - b)^2$ (qui, développé, a trois termes). Vérifier en redéveloppant : $(x - 13)^2 = x^2 - 26x + 169$, et non $x^2 - 169$.
5. Croire que $5x + 4$ est un produit « parce qu'il y a $5x$ » : l'opération principale est $+$, c'est une somme, on ne peut rien y simplifier.
6. S'arrêter à $3x(3x - 2)$ pour factoriser $9x^2 - 6x + 1$: on a oublié le $+1$, l'expression n'était pas $9x^2 - 6x$; en fait, $9x^2 - 6x + 1 = (3x - 1)^2$.
7. Croire qu'une vérification sur trois exemples démontre une propriété portant sur tous les entiers : ces essais établissent trois cas seulement ; ici, la preuve doit raisonner sur un entier quelconque et justifier chaque étape.

→ Au TD : sujets type Brevet 6.1 et 6.3 à 6.6 ; exercice 9.1 (modèles V1 et F3), à reprendre au chapitre 02

→ Au TD :  facultatifs : exercices 6.2, 6.7 à 6.9, 7.1 à 7.4, 8.1 à 8.6 et 9.2

Fiche de synthèse

La synthèse du chapitre : reconnaître / calculer / conclure		
Je reconnais...	... donc je calcule...	... et je vérifie
un produit $k(a+b)$ ou $(a+b)(c+d)$	je développe (simple ou double distributivité), puis je réduis	valeur test $x = 1$
$(a+b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$	le double produit est là ; valeur test $x = 1$
$(a-b)^2$	$a^2 - 2ab + b^2$	signe - uniquement sur $2ab$; valeur test $x = 1$
$(a+b)(a-b)$	$a^2 - b^2$	deux termes seulement ; valeur test $x = 1$
une somme $ka + kb$	je factorise par le facteur commun k (nombre, lettre ou parenthèse)	redévelopper de tête ; parenthèse commune : valeur test $x = 1$
deux carrés séparés par -	$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$	redévelopper de tête
trois termes, extrêmes carrés, milieu = $2ab$	$(a+b)^2$ si $+2ab$, $(a-b)^2$ si $-2ab$	compte du double produit, puis redévelopper de tête
201^2 , 197×203 ou $84^2 - 16^2 \dots$	nombre rond voisin (C1) ou forme développée reconnue (C2)	chiffre des unités (et ordre de grandeur pour un carré ou un produit)
« montrer que pour tout entier... »	littéral : $2n$ pair, $2n+1$ impair, $3k$ multiple de 3, n , $n+1$ consécutifs ; puis développer ou factoriser	conclusion en « Donc, pour tout entier $n \dots$ » ; contrôle numérique facultatif après la preuve

Questions flash (sans aide)

1. Développer $(x+15)^2$.

2. Factoriser $x^2 - 400$.

3. Factoriser $9x^2 - 36$.

4. Calculer 301^2 de tête.

5. Un multiple de 3 s'écrit... ? Un impair s'écrit... ?

Réponses. 1) $x^2 + 30x + 225$; 2) $(x+20)(x-20)$; 3) $(3x+6)(3x-6)$; 4) $90000 + 600 + 1 = 90601$; 5) $3k$; $2n+1$.

Je m'évalue (QCM) – une seule réponse exacte par question

1. L'expression $3(x-7)$ est :

a. une somme b. un produit c. un carré d. une équation

2. $(x+7)^2$ est égal à :

a. $x^2 + 49$ b. $x^2 + 7x + 49$ c. $x^2 + 14x + 49$ d. $2x + 14$

3. $(3x-2)^2$ est égal à :

a. $9x^2 - 4$ b. $9x^2 - 12x + 4$ c. $3x^2 - 12x + 4$ d. $9x^2 + 12x + 4$

4. $(x+15)(x-15)$ est égal à :

a. $x^2 - 225$ b. $x^2 + 225$ c. $x^2 - 30x - 225$ d. $x^2 - 30x + 225$

5. La forme factorisée de $x^2 - 196$ est :

a. $(x-14)^2$ b. $(x+14)(x-14)$ c. $x(x-196)$ d. impossible

6. La forme factorisée de $x^2 - 24x + 144$ est :

a. $(x-12)^2$ b. $(x+12)^2$ c. $(x+12)(x-12)$ d. $(x-24)(x+12)$
7. L'opposé de $6-5x$ est :

a. $6+5x$ b. $-6-5x$ c. $5x-6$ d. $\frac{1}{6-5x}$

8. Pour calculer 203×197 , quelle identité remarquable transforme directement $(200+3)(200-3)$ en une différence de carrés ?

a. $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ b. $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

c. $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ d. la double distributivité

9. Le facteur commun de $(x-4)(x+1) + (x-4)(2x+3)$ est :

a. x b. $(x+1)$ c. $(x-4)$ d. $(2x+3)$

10. La somme de deux entiers consécutifs n et $n+1$ vaut :

a. $2n$ b. $2n+1$ c. n^2+1 d. $2n+2$

Réponses. 1) b 2) c 3) b 4) a 5) b 6) a 7) c 8) c 9) c 10) b

Lexique de consultation progressive

La carte des modèles de rédaction

Code	Type d'exercice	Les étapes, en bref	Exercices du TD
L1	Somme ou produit ?	dernier calcul, nature, termes ou facteurs	1.1, bloc c)
L2	Opposé d'une expression	$-(\dots)$, changer le signe de chaque terme, somme nulle	1.2 b), 6.1 c)
L3	Réduire	termes semblables, regroupement, coefficients additionnés	1.2 c)
D1	Développer avec la distributivité	tous les produits, chacun avec son signe, réduction, contrôle en $x = 1$	1.2 a), 1.3, 1.4, 3.6 a), 6.1 c), 6.3 a), 6.6 a), bloc a)
D2	Développer avec une identité	a et b , formule avec les blocs, chaque morceau, contrôle en $x = 1$	2.1, 2.2, 3.5, 6.1 a), 6.3 a), 6.6 a), bloc a)
F1	Facteur commun	facteur commun, le faire apparaître, le mettre devant, redévelopper	3.1
F2	Parenthèse commune	parenthèse commune, crochet, réduction du crochet, contrôle en $x = 1$	3.2, bloc a)
F3	Factoriser avec une identité	structure, a et b , identité, réduction des facteurs, redévelopper	2.3, 3.3, 3.4, 3.5, 3.6 c), 6.1 b), 6.6 b), 9.1 b)
C1	Carré ou produit proche d'un nombre rond	nombre rond et petit écart, formule, calcul de tête, unités et ordre de grandeur	4.1, 4.4 a) à c), 4.5 c), 6.4 a) b)
C2	Forme développée reconnue	forme, produit, calcul de tête, chiffre des unités	4.2, 4.3 a), 4.4 d), 6.4 c)
V1	Valeur d'une expression	recopier, remplacer (négatif entre parenthèses), priorités, phrase	6.3 c), 6.6 c) d), 9.1 a) c)
P1	Programme de calcul	nombre de départ, une instruction par calcul, résultat	5.1 a) à c), 5.2, 5.3 a) à c)
P2	Nombre de départ	égalité, même opération sur les deux membres, conclusion, vérification	5.1 c), 5.3 d)
J1	Égalité pour tout nombre	partir d'un membre, chaîne justifiée, « Donc, pour tout »	1.5, 2.4 d), 4.3 c), 5.1 d), 5.2 b), 6.3 b)
J2	Propriété des entiers	« Soit », calcul, « Or », « Donc, pour tout entier »	5.4 d) e), 6.5 b), bloc d)
J3	Exemples et conjecture	calculs, constat et conjecture, portée des exemples	5.1 d), 5.2 a), 5.4 a) c), 6.5 a)
T1	Problème	ce que l'on sait, ce que l'on cherche, calcul, conclusion, vérification	4.3 a) b)
T2	Vrai ou faux	réponse annoncée, justification selon le cas	2.4, bloc c)
T3	Contre-exemple	exemple le plus simple, les deux membres, conclusion	2.4 a) b) e) f), 3.6 b), 4.5 a) b) d), 5.4 f), 6.5 c), bloc b)

« bloc » : le bloc transversal « Justifier et raisonner », après l'exercice 5.8.

Lire les symboles : comment on les dit à voix haute

Une écriture littérale n'est pas un code secret : elle abrège une phrase sur des nombres. Ce tableau est un répertoire à consulter au besoin, et non une liste à mémoriser avant de commencer. Lis d'abord l'énoncé en français ; reviens ensuite au symbole pour l'abrégé. Pour chaque notation, la dernière colonne précise aussi à quoi elle sert dans le chapitre.

Symbole	On le lit	Ce qu'il signifie et à quoi il sert
$3x \quad ab$	« trois x », « a b »	le signe $\times$ est sous-entendu entre un nombre et une lettre, entre deux lettres ou devant une parenthèse : $3x = 3 \times x$, $ab = a \times b$, $2ab = 2 \times a \times b$. Usage : lire un double produit $2ab$ comme un seul terme.
x^2	« x au carré »	$x \times x$; de même $E^2 = E \times E$ pour une expression E entière. Usage : les carrés extrêmes d'une identité, comme $9x^2 = (3x)^2$.
$(a+b)^2$	« a plus b , le tout au carré »	les parenthèses portent sur toute la somme : c'est $(a+b) \times (a+b)$, et non $a^2 + b^2$. Usage : reconnaître un carré de somme avant de développer.
$k(a+b)$	« k facteur de a plus b »	le produit du nombre k par la somme $a+b$; la parenthèse forme un bloc. Usage : la distributivité $k(a+b) = ka + kb$, dans les deux sens.
$-(a-b)$	« l'opposé de la différence de a et de b »	le signe $-$ devant la parenthèse est un facteur -1 : $-(a-b) = -a + b$. Usage : soustraire une expression entière sans perdre de signe.
$[\quad]$	« crochet »	un crochet joue le rôle d'une parenthèse qui en contient d'autres : $(x-5)[(x+1)+(x+4)]$. Usage : mettre une parenthèse en facteur (modèle F2), factoriser un bloc au carré (modèle F3).
$\frac{x}{2}$	« x sur deux »	la moitié de x ; on a $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$. Usage : les identités avec des fractions.

Symbole	On le lit	Ce qu'il signifie et à quoi il sert
$=$	« égale »	quatre usages : formule, identité, évaluation, équation (partie 1). Usage : se demander à chaque ligne « pourquoi ces deux membres ont-ils la même valeur ? ».
$\neq$	« différent de »	les deux membres n'ont pas la même valeur : $(3+4)^2 \neq 3^2 + 4^2$. Usage : écrire un contre-exemple.
$\geq \quad \leq \quad <$	« supérieur ou égal à », « inférieur ou égal à », « strictement inférieur à »	$d^2 \geq 0$: un carré est toujours positif ou nul (positif : ≥ 0 ; strictement positif : > 0) ; $0 < b < a$: b est strictement compris entre 0 et a . Usage : préciser les valeurs permises, comme $n \geq 2$ pour le carré de mosaïque ou $0 < b < a$ pour une preuve par les aires.
$2n \quad 2n+1$	« deux n », « deux n plus un »	avec n entier, un nombre pair et un nombre impair ; $3k$ est un multiple de 3 ; $n, n+1, n+2$ sont trois entiers consécutifs. Usage : traduire un énoncé en littéral avant de démontrer.
S_n	« S indice n »	une grandeur qui dépend de l'entier n ; S_3 est sa valeur pour $n=3$. Usage : nommer un total qui change avec n .
$1+3+\cdots+(2n-1)$	« un plus trois, et ainsi de suite jusqu'à deux n moins un »	les points de suspension remplacent les termes intermédiaires. Usage : écrire une somme dont le nombre de termes dépend de n (exercice 8.2 du TD, facultatif).
$\sqrt{10}$	« racine carrée de dix »	le nombre positif dont le carré vaut 10 ; il sera défini au chapitre 02. Usage : factoriser $x^2 - 10$, plus tard.
$\mathcal{A}$	« A rond »	une aire. Usage : l'aire d'une bordure, $\mathcal{A} = (x+4)^2 - x^2$, ou de la partie visible d'un carton (modèle T1).
$\xrightarrow{\text{développer}}$	« donne, en développant »	le passage d'une écriture à une autre écriture de même valeur. Usage : le schéma produit / somme de la partie 1.
■	« fin de la démonstration »	signale que la preuve est terminée et que la conclusion est acquise. Usage : clore proprement une rédaction.