



Correction de la feuille d'exercices

Calcul littéral : Identités remarquables

Difficulté : ☆☆☆ très facile ★☆☆ facile ★★★ moyen ★★★★★ difficile

Parcours : 🏃 minimum 🎯 recommandé 🏆 perfectionnement

Les encadrés grisés 📝 montrent comment rédiger sur une copie.

À retenir. Les trois identités remarquables (pour tous nombres a et b) :

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2, \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2, \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2.$$

Photographier la structure avant de factoriser : facteur commun d'abord ; puis deux carrés séparés par $- \rightarrow (a+b)(a-b)$; trois termes avec extrêmes carrés et milieu égal à $2ab$ ou à $-2ab \rightarrow (a+b)^2$ ou $(a-b)^2$.

Toujours contrôler : redévelopper de tête, ou calculer les deux expressions pour $x = 1$ (un accord ne prouve pas l'égalité).

1. Nature d'une expression et développement

Réactivation express (chapitres précédents) 🏃

☆☆☆

📎 a) $84 = 2^2 \times 3 \times 7$ et $126 = 2 \times 3^2 \times 7$, donc $\frac{84}{126} = \frac{2^2 \times 3 \times 7}{2 \times 3^2 \times 7} = \boxed{\frac{2}{3}}$.

b) $2^3 \times 2^5 = 2^{3+5} = \boxed{2^8}$; $\frac{2^9}{2^4} = 2^{9-4} = \boxed{2^5}$.

📎 c) $0,0072 = \boxed{7,2 \times 10^{-3}}$.

d) $\frac{3}{4} - \frac{1}{6} = \frac{9}{12} - \frac{2}{12} = \boxed{\frac{7}{12}}$.

📎 e) Le rapport des aires est le carré du rapport des côtés : $2^2 = \boxed{4}$.

1.1. Somme ou produit ? Le tri 🏃

☆☆☆

Méthode. Modèle associé : **L1**.

📎 a) Dans $3x + 2$, le dernier calcul est l'addition de $3x$ et de 2 : c'est une somme, de termes $3x$ et 2 .

b) Dans $5(x+4)$, le dernier calcul est la multiplication de 5 par $(x+4)$: c'est un produit, de facteurs 5 et $(x+4)$.

📎 c) Dans $(x+1)(x-3)$, le dernier calcul est la multiplication de $(x+1)$ par $(x-3)$: c'est un produit, de facteurs $(x+1)$ et $(x-3)$.

d) Dans $x^2 - 9$, le dernier calcul est la soustraction de 9 : c'est une somme, de termes x^2 et -9 .

📎 e) Dans $7 - 5x$, le dernier calcul est la soustraction de $5x$: c'est une somme, de termes 7 et $-5x$.

f) Dans $(2x-3)^2$, qui se lit $(2x-3) \times (2x-3)$, le dernier calcul est la multiplication de $(2x-3)$ par $(2x-3)$: c'est un produit, de facteurs $(2x-3)$ et $(2x-3)$.

📎 g) Dans $3(x+1) + 2$, le dernier calcul est l'addition de $3(x+1)$ et de 2 : c'est une somme, de termes $3(x+1)$ et 2 .

h) Dans $x(x+1) + 3(x+2)$, le dernier calcul est l'addition de $x(x+1)$ et de $3(x+2)$: c'est une somme, de termes $x(x+1)$ et $3(x+2)$.

📎 i) Dans $2x^2$, qui se lit $2 \times x \times x$, le dernier calcul est une multiplication : c'est un produit, de facteurs 2 , x et x .

j) Dans $(x+5)(x-5)$, le dernier calcul est la multiplication de $(x+5)$ par $(x-5)$: c'est un produit, de facteurs $(x+5)$ et $(x-5)$.

Attention ! En f), un carré est un produit, même si son développement, $4x^2 - 12x + 9$, est une somme : la forme factorisée et la forme développée d'une même expression n'ont pas la même nature.

1.2. Distributivité simple et opposé 🏃

☆☆☆

Méthode. Modèles associés : **D1** (question a)) ; **L2** (question b)) ; **L3** (question c)).

📎 a)

$$3(2x+5) = 3 \times 2x + 3 \times 5$$
$$= \boxed{6x + 15}$$

Contrôle ($x = 1$) : $3 \times 7 = 21$ et $6 + 15 = 21$. ✓

$$-4x(6-3x) = -4x \times 6 + (-4x) \times (-3x)$$
$$= -24x + 12x^2$$
$$= \boxed{12x^2 - 24x}$$

Contrôle ($x = 1$) : $-4 \times 3 = -12$ et $12 - 24 = -12$. ✓



$$\begin{aligned}
7(3-x) + 2x &= 7 \times 3 + 7 \times (-x) + 2x \\
&= 21 - 7x + 2x \\
&= \boxed{-5x + 21}
\end{aligned}$$

je calcule chaque produit

je regroupe les termes semblables

Contrôle ($x = 1$) : $7 \times 2 + 2 = 16$ et $-5 + 21 = 16$. ✓

b) L'opposé de $5 - 4x$ s'écrit $-(5 - 4x)$. Je change le signe de chacun de ses termes : $-(5 - 4x) = \boxed{-5 + 4x}$.

Contrôle : $(5 - 4x) + (-5 + 4x) = 0$. ✓

L'opposé de $3x - 7$ s'écrit $-(3x - 7)$. Je change le signe de chacun de ses termes : $-(3x - 7) = \boxed{-3x + 7}$.

Contrôle : $(3x - 7) + (-3x + 7) = 0$. ✓

L'opposé de $-2x + 9$ s'écrit $-(-2x + 9)$. Je change le signe de chacun de ses termes : $-(-2x + 9) = \boxed{2x - 9}$.

Contrôle : $(-2x + 9) + (2x - 9) = 0$. ✓

L'opposé de $x^2 - 6x + 1$ s'écrit $-(x^2 - 6x + 1)$. Je change le signe de chacun de ses termes : $-(x^2 - 6x + 1) = \boxed{-x^2 + 6x - 1}$.

Contrôle : $(x^2 - 6x + 1) + (-x^2 + 6x - 1) = 0$. ✓

c) Les termes semblables sont $5x$ et $-2x$, puis 3 et 8 .

$$\begin{aligned}
5x + 3 - 2x + 8 &= (5 - 2)x + (3 + 8) \\
&= \boxed{3x + 11}
\end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $5 + 3 - 2 + 8 = 14$ et $3 + 11 = 14$. ✓

Les termes semblables sont $4x^2$ et $3x^2$, puis $-x$ et $7x$; le nombre -9 est seul.

$$\begin{aligned}
4x^2 - x + 3x^2 + 7x - 9 &= (4 + 3)x^2 + (-1 + 7)x - 9 \\
&= \boxed{7x^2 + 6x - 9}
\end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $4 - 1 + 3 + 7 - 9 = 4$ et $7 + 6 - 9 = 4$. ✓

1.3. Double distributivité : les gammes

★★☆☆

Méthode. Modèle associé : D1.

a)

$$\begin{aligned}
(x + 3)(x + 5) &= x \times x + x \times 5 + 3 \times x + 3 \times 5 \\
&= x^2 + 5x + 3x + 15 \\
&= \boxed{x^2 + 8x + 15}
\end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $4 \times 6 = 24$ et $1 + 8 + 15 = 24$. ✓

b)

$$\begin{aligned}
(x - 3)(2x + 5) &= x \times 2x + x \times 5 + (-3) \times 2x + (-3) \times 5 \\
&= 2x^2 + 5x - 6x - 15 \\
&= \boxed{2x^2 - x - 15}
\end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $(-2) \times 7 = -14$ et $2 - 1 - 15 = -14$. ✓

c)

$$\begin{aligned}
(3x + 1)(2x - 7) &= 3x \times 2x + 3x \times (-7) + 1 \times 2x + 1 \times (-7) \\
&= 6x^2 - 21x + 2x - 7 \\
&= \boxed{6x^2 - 19x - 7}
\end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $4 \times (-5) = -20$ et $6 - 19 - 7 = -20$. ✓

d)

$$\begin{aligned}
(2x - 3)(5x + 7) &= 2x \times 5x + 2x \times 7 + (-3) \times 5x + (-3) \times 7 \\
&= 10x^2 + 14x - 15x - 21 \\
&= \boxed{10x^2 - x - 21}
\end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $(-1) \times 12 = -12$ et $10 - 1 - 21 = -12$. ✓

e)

$$\begin{aligned}
-4x(6 - 3x) - 8x^2 &= -4x \times 6 + (-4x) \times (-3x) - 8x^2 \\
&= -24x + 12x^2 - 8x^2 \\
&= \boxed{4x^2 - 24x}
\end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $-4 \times 3 - 8 = -20$ et $4 - 24 = -20$. ✓

f)

$$\begin{aligned}
3(2x + 1) - (6 - x) &= 3 \times 2x + 3 \times 1 - (6 - x) \\
&= 6x + 3 - 6 + x \\
&= \boxed{7x - 3}
\end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $3 \times 3 - 5 = 4$ et $7 - 3 = 4$. ✓

g)

$$\begin{aligned}
(-3x + 5)(2x - 3) &= -3x \times 2x + (-3x) \times (-3) + 5 \times 2x + 5 \times (-3) \\
&= -6x^2 + 9x + 10x - 15 \\
&= \boxed{-6x^2 + 19x - 15}
\end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $2 \times (-1) = -2$ et $-6 + 19 - 15 = -2$. ✓

h)

$$\begin{aligned}
(x + 6)(x - 2) - x^2 &= x \times x + x \times (-2) + 6 \times x + 6 \times (-2) - x^2 \\
&= x^2 - 2x + 6x - 12 - x^2 \\
&= \boxed{4x - 12}
\end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $7 \times (-1) - 1 = -8$ et $4 - 12 = -8$. ✓

Attention ! En f), écrire $-(6 - x) = -6 - x$ revient à ne changer le signe que du premier terme de la parenthèse : on trouverait $6x + 3 - 6 - x = 5x - 3$, qui vaut 2 pour $x = 1$ au lieu de 4. Le contrôle détecte l'erreur.

1.4. Expressions mixtes à réduire

★★★★

Méthode. Modèle associé : D1.

a)

$$\begin{aligned}
A &= 5(4x - 7) + (x + 9)(5x - 6) \\
&= 5 \times 4x + 5 \times (-7) + x \times 5x + x \times (-6) + 9 \times 5x + 9 \times (-6) \\
&= 20x - 35 + 5x^2 - 6x + 45x - 54 \\
&= \boxed{5x^2 + 59x - 89}
\end{aligned}$$

je calcule chaque produit

je regroupe les termes semblables

Contrôle ($x = 1$) : $5 \times (-3) + 10 \times (-1) = -25$ et $5 + 59 - 89 = -25$. ✓

🔗 b)

$$\begin{aligned} B &= (x-5)(x+7) + (2x-4)(3x-1) \\ &= x \times x + x \times 7 + (-5) \times x + (-5) \times 7 + 2x \times 3x + 2x \times (-1) + (-4) \times 3x + (-4) \times (-1) \\ &= x^2 + 7x - 5x - 35 + 6x^2 - 2x - 12x + 4 && \text{je calcule chaque produit} \\ &= \boxed{7x^2 - 12x - 31} && \text{je regroupe les termes semblables} \end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $(-4) \times 8 + (-2) \times 2 = -36$ et $7 - 12 - 31 = -36$. ✓

🔗 c)

$$\begin{aligned} C &= 3x(x-3) - (x+7)(4x-2) \\ &= 3x \times x + 3x \times (-3) - (x \times 4x + x \times (-2) + 7 \times 4x + 7 \times (-2)) \\ &= 3x^2 - 9x - (4x^2 - 2x + 28x - 14) && \text{je calcule chaque produit} \\ &= 3x^2 - 9x - 4x^2 + 2x - 28x + 14 && \text{le signe } - \text{ change le signe de chaque terme de la parenthèse} \\ &= \boxed{-x^2 - 35x + 14} && \text{je regroupe les termes semblables} \end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $3 \times (-2) - 8 \times 2 = -22$ et $-1 - 35 + 14 = -22$. ✓

🔗 d)

$$\begin{aligned} D &= (y-9)(3y+2) - (2y-7)(4y-5) \\ &= y \times 3y + y \times 2 + (-9) \times 3y + (-9) \times 2 \\ &\quad - (2y \times 4y + 2y \times (-5) + (-7) \times 4y + (-7) \times (-5)) \\ &= 3y^2 + 2y - 27y - 18 - (8y^2 - 10y - 28y + 35) && \text{je calcule chaque produit} \\ &= 3y^2 + 2y - 27y - 18 - 8y^2 + 10y + 28y - 35 && \text{le signe } - \text{ change le signe de chaque terme de la parenthèse} \\ &= \boxed{-5y^2 + 13y - 53} && \text{je regroupe les termes semblables} \end{aligned}$$

Contrôle ($y = 1$) : $(-8) \times 5 - (-5) \times (-1) = -45$ et $-5 + 13 - 53 = -45$. ✓

1.5. Démontrer la double distributivité 🌀

★★★☆

Méthode. Modèle associé : J1.

🔗 a) Je développe le membre de gauche. Je pose $k = a + b$.

$$\begin{aligned} (a+b)(c+d) &= k(c+d) && \text{je remplace } a+b \text{ par } k \\ &= \boxed{kc + kd} && \text{distributivité simple : } k(c+d) = kc + kd \end{aligned}$$

🔗 b) Je remplace k par $a + b$, puis je développe chacun des deux produits en distribuant par la droite.

$$\begin{aligned} kc + kd &= (a+b)c + (a+b)d && \text{je remplace } k \text{ par } a+b \\ &= \boxed{ac + bc + ad + bd} && \text{distributivité simple, deux fois : } (a+b)c = ac + bc \text{ et } (a+b)d = ad + bd \end{aligned}$$

🔗 c) Je recolle les égalités obtenues en a) et en b), puis je remets les termes dans l'ordre.

$$\begin{aligned} (a+b)(c+d) &= ac + bc + ad + bd && \text{questions a) et b)} \\ &= ac + ad + bc + bd && \text{l'addition est commutative : j'échange } bc \text{ et } ad \end{aligned}$$

Je retrouve le membre de droite. Donc, pour tous les nombres a, b, c et d , $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$. ■

J'ai appliqué la distributivité simple $\boxed{3}$ fois en tout : une fois en a), deux fois en b).

🔗 d) Je développe $(a+b)(c-d)$ par le même chemin. Je pose $k = a + b$.

$$\begin{aligned} (a+b)(c-d) &= k(c-d) && \text{je remplace } a+b \text{ par } k \\ &= kc - kd && \text{distributivité simple : } k(c-d) = kc - kd \\ &= (a+b)c - (a+b)d && \text{je remplace } k \text{ par } a+b \\ &= ac + bc - (ad + bd) && \text{distributivité simple, deux fois : } (a+b)c = ac + bc \text{ et } (a+b)d = ad + bd \\ &= ac + bc - ad - bd && \text{le signe } - \text{ change le signe de chaque terme de la parenthèse} \\ &= ac - ad + bc - bd && \text{l'addition est commutative : j'échange } bc \text{ et } -ad \end{aligned}$$

Donc, pour tous les nombres a, b, c et d , $(a+b)(c-d) = ac - ad + bc - bd$. ■

À retenir. Donner un nom à un bloc ($k = a + b$) permet de le traiter comme un seul nombre. L'idée resservira, par exemple à l'exercice 3.4, où a est le bloc $x + 1$.

2. Identités remarquables : développer

2.1. Les gammes

★★☆☆

Méthode. Modèle associé : D2.

 a) J'utilise $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 3$.

$$(x+3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2$$

$$= \boxed{x^2 + 6x + 9}$$

Contrôle ($x = 1$) : $4^2 = 16$ et $1 + 6 + 9 = 16$. ✓

b) J'utilise $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 10$.

$$(x+10)^2 = x^2 + 2 \times x \times 10 + 10^2$$

$$= \boxed{x^2 + 20x + 100}$$

Contrôle ($x = 1$) : $11^2 = 121$ et $1 + 20 + 100 = 121$. ✓

 c) J'utilise $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 4$.

$$(x-4)^2 = x^2 - 2 \times x \times 4 + 4^2$$

$$= \boxed{x^2 - 8x + 16}$$

Contrôle ($x = 1$) : $(-3)^2 = 9$ et $1 - 8 + 16 = 9$. ✓

d) J'utilise $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = y$ et $b = 6$.

$$(y-6)^2 = y^2 - 2 \times y \times 6 + 6^2$$

$$= \boxed{y^2 - 12y + 36}$$

Contrôle ($y = 1$) : $(-5)^2 = 25$ et $1 - 12 + 36 = 25$. ✓

 e) J'utilise $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ avec $A = a$ et $B = 7$.

$$(a-7)(a+7) = a^2 - 7^2$$

$$= \boxed{a^2 - 49}$$

Contrôle ($a = 1$) : $(-6) \times 8 = -48$ et $1 - 49 = -48$. ✓

f) J'utilise $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ avec $a = x$ et $b = 8$.

$$(x+8)(x-8) = x^2 - 8^2$$

$$= \boxed{x^2 - 64}$$

Contrôle ($x = 1$) : $9 \times (-7) = -63$ et $1 - 64 = -63$. ✓

 g) J'utilise $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ avec $a = t$ et $b = 5$.

$$(t-5)(t+5) = t^2 - 5^2$$

$$= \boxed{t^2 - 25}$$

Contrôle ($t = 1$) : $(-4) \times 6 = -24$ et $1 - 25 = -24$. ✓

h) J'utilise $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = n$ et $b = 1$.

$$(n+1)^2 = n^2 + 2 \times n \times 1 + 1^2$$

$$= \boxed{n^2 + 2n + 1}$$

Contrôle ($n = 1$) : $2^2 = 4$ et $1 + 2 + 1 = 4$. ✓

 i) J'utilise $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$ avec $A = 4$ et $B = a$.

$$(4-a)^2 = 4^2 - 2 \times 4 \times a + a^2$$

$$= \boxed{16 - 8a + a^2}$$

Contrôle ($a = 1$) : $3^2 = 9$ et $16 - 8 + 1 = 9$. ✓

2.2. Avec des coefficients

★★☆☆

Méthode. Modèle associé : D2.

 a) J'utilise $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 1$.

$$(2x+1)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 1 + 1^2$$

$$= \boxed{4x^2 + 4x + 1}$$

Contrôle ($x = 1$) : $3^2 = 9$ et $4 + 4 + 1 = 9$. ✓

b) J'utilise $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 7$.

$$(3x+7)^2 = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 7 + 7^2$$

$$= \boxed{9x^2 + 42x + 49}$$

Contrôle ($x = 1$) : $10^2 = 100$ et $9 + 42 + 49 = 100$. ✓

 c) J'utilise $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 3$ et $b = 2x$.

$$(3-2x)^2 = 3^2 - 2 \times 3 \times 2x + (2x)^2$$

$$= \boxed{9 - 12x + 4x^2}$$

Contrôle ($x = 1$) : $1^2 = 1$ et $9 - 12 + 4 = 1$. ✓

d) J'utilise $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 4x$ et $b = 3$.

$$(4x-3)^2 = (4x)^2 - 2 \times 4x \times 3 + 3^2$$

$$= \boxed{16x^2 - 24x + 9}$$

Contrôle ($x = 1$) : $1^2 = 1$ et $16 - 24 + 9 = 1$. ✓

 e) J'utilise $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ avec $a = 3x$ et $b = 2$.

$$(3x-2)(3x+2) = (3x)^2 - 2^2$$

$$= \boxed{9x^2 - 4}$$

Contrôle ($x = 1$) : $1 \times 5 = 5$ et $9 - 4 = 5$. ✓

f) J'utilise $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ avec $a = 5x$ et $b = 7$.

$$(5x+7)(5x-7) = (5x)^2 - 7^2$$

$$= \boxed{25x^2 - 49}$$

Contrôle ($x = 1$) : $12 \times (-2) = -24$ et $25 - 49 = -24$. ✓

 g) J'utilise $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = y$ et $b = 2,5$.

$$(y-2,5)^2 = y^2 - 2 \times y \times 2,5 + 2,5^2$$

$$= \boxed{y^2 - 5y + 6,25}$$

Contrôle ($y = 1$) : $(-1,5)^2 = 2,25$ et $1 - 5 + 6,25 = 2,25$. ✓

h) J'utilise $(A-B)(A+B) = A^2 - B^2$ avec $A = 1$ et $B = a$.

$$(1-a)(1+a) = 1^2 - a^2$$

$$= \boxed{1 - a^2}$$

Contrôle ($a = 1$) : $0 \times 2 = 0$ et $1 - 1 = 0$. ✓

Attention ! En c), écrire $2x^2$ au lieu de $(2x)^2 = 4x^2$ donnerait $9 - 12x + 2x^2$, qui vaut -1 pour $x = 1$ au lieu de 1 : le contrôle détecte l'erreur.

2.3. Le sens inverse : reconnaître une forme développée

★★★☆☆

Méthode. Modèle associé : **F3**.

 **a)** Trois termes, et les deux extrêmes sont des carrés : c'est peut-être un carré parfait. $x^2 = x^2$ et $25 = 5^2$, donc $a = x$ et $b = 5$; le double produit vaut $2 \times x \times 5 = 10x$: c'est bien le terme central, précédé du signe +.

$$\begin{aligned} x^2 + 10x + 25 &= x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 \\ &= \boxed{(x + 5)^2} \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \end{aligned}$$

Contrôle : $(x + 5)^2 = x^2 + 2 \times x \times 5 + 5^2 = x^2 + 10x + 25$. ✓

 Trois termes, et les deux extrêmes sont des carrés : c'est peut-être un carré parfait. $x^2 = x^2$ et $9 = 3^2$, donc $a = x$ et $b = 3$; le double produit vaut $2 \times x \times 3 = 6x$: c'est bien le terme central, précédé du signe -.

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + 9 &= x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 \\ &= \boxed{(x - 3)^2} \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \end{aligned}$$

Contrôle : $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$. ✓

 Trois termes, et les deux extrêmes sont des carrés : c'est peut-être un carré parfait. $4x^2 = (2x)^2$ et $9 = 3^2$, donc $a = 2x$ et $b = 3$; le double produit vaut $2 \times 2x \times 3 = 12x$: c'est bien le terme central, précédé du signe -.

$$\begin{aligned} 4x^2 - 12x + 9 &= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 \\ &= \boxed{(2x - 3)^2} \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \end{aligned}$$

Contrôle : $(2x - 3)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 - 12x + 9$. ✓

 Trois termes, et les deux extrêmes sont des carrés : c'est peut-être un carré parfait. $4y^2 = (2y)^2$ et $100 = 10^2$, donc $a = 2y$ et $b = 10$; le double produit vaut $2 \times 2y \times 10 = 40y$: c'est bien le terme central, précédé du signe +.

$$\begin{aligned} 4y^2 + 40y + 100 &= (2y)^2 + 2 \times 2y \times 10 + 10^2 \\ &= \boxed{(2y + 10)^2} \quad a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2 \end{aligned}$$

Contrôle : $(2y + 10)^2 = (2y)^2 + 2 \times 2y \times 10 + 10^2 = 4y^2 + 40y + 100$. ✓

 Trois termes, et les deux extrêmes sont des carrés : c'est peut-être un carré parfait. $49t^2 = (7t)^2$ et $1 = 1^2$, donc $a = 7t$ et $b = 1$; le double produit vaut $2 \times 7t \times 1 = 14t$: c'est bien le terme central, précédé du signe -.

$$\begin{aligned} 49t^2 - 14t + 1 &= (7t)^2 - 2 \times 7t \times 1 + 1^2 \\ &= \boxed{(7t - 1)^2} \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \end{aligned}$$

Contrôle : $(7t - 1)^2 = (7t)^2 - 2 \times 7t \times 1 + 1^2 = 49t^2 - 14t + 1$. ✓

 **b)** $x^2 + \dots x + 9$: $x^2 = x^2$ et $9 = 3^2$, donc $a = x$ et $b = 3$; le double produit vaut $2 \times x \times 3 = 6x$. Le nombre manquant peut être $\boxed{6 \text{ ou } -6}$: $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$ et $x^2 - 6x + 9 = (x - 3)^2$.

Contrôle : $(x + 3)^2 = x^2 + 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 + 6x + 9$ et $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$. ✓

 $4x^2 - 4x + \dots$: $4x^2 = (2x)^2$, donc $a = 2x$; le terme central $-4x$ est précédé du signe -, et le double produit $2 \times 2x \times b = 4x \times b$ doit valoir $4x$, donc $b = 1$. Le terme manquant est $1^2 = 1$: le nombre manquant est $\boxed{1}$, et $4x^2 - 4x + 1 = (2x - 1)^2$.

Contrôle : $(2x - 1)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1$. ✓

 $\dots x^2 + 100x + 100$: $100 = 10^2$, donc $b = 10$; le double produit $2 \times a \times 10 = 20 \times a$ doit valoir $100x$, donc $a = 5x$. Le terme manquant est $(5x)^2 = 25x^2$: le nombre manquant est $\boxed{25}$, et $25x^2 + 100x + 100 = (5x + 10)^2$.

Contrôle : $(5x + 10)^2 = (5x)^2 + 2 \times 5x \times 10 + 10^2 = 25x^2 + 100x + 100$. ✓

 **c)** Il y a $\boxed{2}$ réponses, 6 et -6 : $9 = 3^2 = (-3)^2$, et le double produit $2 \times x \times 3$ peut être précédé du signe + ou du signe -.

2.4. Vrai ou faux ?

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **T2** ; **T3** (questions a), b), e) et f)) ; **J1** (question d)).

 **a)** FAUX. Pour $a = 1$, $(2a + 3)^2 = 5^2 = 25$ mais $4a^2 + 9 = 4 + 9 = 13$: comme $25 \neq 13$, l'égalité n'est pas vraie pour tout nombre a .

 **b)** FAUX. Pour deux nombres a et b , l'affirmation s'écrit $(a - b)^2 = a^2 - b^2$. Pour $a = 2$ et $b = 1$, $(a - b)^2 = 1^2 = 1$ mais $a^2 - b^2 = 4 - 1 = 3$: comme $1 \neq 3$, l'égalité n'est pas vraie pour tous les nombres a et b .

 **c)** VRAI. Je calcule séparément les deux membres : $26^2 - 25^2 = 676 - 625 = 51$ et $26 + 25 = 51$. Les deux membres sont égaux.

🔗 d) VRAI. Je développe le membre de gauche.

$$\begin{aligned}(a+5)^2 - (a-5)^2 &= a^2 + 10a + 25 - (a^2 - 10a + 25) & (A+B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \text{ et } (A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \\ &= a^2 + 10a + 25 - a^2 + 10a - 25 & \text{le signe } - &\text{change le signe de chaque terme de la parenthèse} \\ &= 20a & \text{je regroupe les termes semblables}\end{aligned}$$

Je retrouve le membre de droite. Donc, pour tout nombre a , $(a+5)^2 - (a-5)^2 = 20a$. ■

🔗 e) FAUX. Pour $x = 1$, $x^2 - 12x + 9 = 1 - 12 + 9 = -2$: comme un carré est toujours positif ou nul et que $-2 < 0$, le nombre -2 n'est le carré d'aucun nombre ; l'affirmation n'est pas vraie pour tout nombre x .

🔗 f) FAUX. Pour $a = 1$ et $b = 1$, $(a+b)^2 = 2^2 = 4$ mais $a^2 + b^2 = 1 + 1 = 2$: comme $4 \neq 2$, l'égalité n'est pas vraie pour tous les nombres a et b .

🔗 g) VRAI. Il suffit d'un exemple : pour $a = 1$ et $b = 0$, $(1+0)^2 = 1$ et $1^2 + 0^2 = 1$: les deux membres sont égaux pour $a = 1$ et $b = 0$, donc de tels nombres existent.

Attention ! En a) et en f), l'égalité fautive oublie le double produit : $(2a+3)^2 = 4a^2 + 12a + 9$ et $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

À retenir. L'affirmation « pour tous les nombres a et b , $(a+b)^2 = a^2 + b^2$ » est fautive (f), alors que cette égalité est vraie pour certains nombres (g) : une identité doit être vraie pour toutes les valeurs des lettres.

2.5. Avec des fractions 🏠

★★★☆☆

Méthode. Modèle associé : **D2**.

🔗 a) J'utilise $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = x$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2} + x\right)\left(\frac{1}{2} - x\right) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - x^2 \\ &= \boxed{\frac{1}{4} - x^2}\end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $\frac{3}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}$ et $\frac{1}{4} - 1 = -\frac{3}{4}$. ✓

b) J'utilise $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = \frac{x}{2}$ et $b = 3$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{2} - 3\right)^2 &= \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{x}{2} \times 3 + 3^2 \\ &= \boxed{\frac{x^2}{4} - 3x + 9}\end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ et $\frac{1}{4} - 3 + 9 = \frac{25}{4}$. ✓

🔗 c) J'utilise $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = \frac{1}{2}$ et $b = 3x$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2} - 3x\right)^2 &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 \times \frac{1}{2} \times 3x + (3x)^2 \\ &= \boxed{\frac{1}{4} - 3x + 9x^2}\end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $\left(-\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$ et $\frac{1}{4} - 3 + 9 = \frac{25}{4}$. ✓

d) J'utilise $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = \frac{t}{3}$ et $b = 6$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{t}{3} + 6\right)^2 &= \left(\frac{t}{3}\right)^2 + 2 \times \frac{t}{3} \times 6 + 6^2 \\ &= \boxed{\frac{t^2}{9} + 4t + 36}\end{aligned}$$

Contrôle ($t = 1$) : $\left(\frac{19}{3}\right)^2 = \frac{361}{9}$ et $\frac{1}{9} + 4 + 36 = \frac{361}{9}$. ✓

🔗 e) J'utilise $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ avec $a = \frac{2x}{5}$ et $b = 1$.

$$\begin{aligned}\left(\frac{2x}{5} - 1\right)\left(\frac{2x}{5} + 1\right) &= \left(\frac{2x}{5}\right)^2 - 1^2 \\ &= \boxed{\frac{4x^2}{25} - 1}\end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $\left(-\frac{3}{5}\right) \times \frac{7}{5} = -\frac{21}{25}$ et $\frac{4}{25} - 1 = -\frac{21}{25}$. ✓

À retenir. Pour élever une fraction au carré, on élève au carré son numérateur et son dénominateur : $\left(\frac{x}{2}\right)^2 = \frac{x^2}{4}$.

2.6. Trois écritures, une seule expression 🏠

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **V1** (questions a) et d)) ; **J3** (question b)) ; **J1** (question c)).

🔗 a) $A = a^2 - ab + b^2$. Pour $a = 5$ et $b = 3$:

$$\begin{aligned}A &= 5^2 - 5 \times 3 + 3^2 \\ &= 25 - 15 + 9 = 19\end{aligned}$$

Pour $a = 5$ et $b = 3$, $\boxed{A = 19}$.

$B = (a+b)^2 - 3ab$. Pour $a = 5$ et $b = 3$:

$$\begin{aligned}B &= (5+3)^2 - 3 \times 5 \times 3 \\ &= 64 - 45 = 19\end{aligned}$$

Pour $a = 5$ et $b = 3$, $\boxed{B = 19}$.

Les deux expressions ont la même valeur.

🔗 b) Non : le pari n'est pas encore prouvé. Le cas $a = 5, b = 3$ ne prouve pas le cas $a = 2023, b = 1515$: il faudrait tout recalculer... ou démontrer l'égalité en général.

🔗 c) Je développe B , pour tous nombres a et b .

$$\begin{aligned} B &= (a+b)^2 - 3ab \\ &= a^2 + 2ab + b^2 - 3ab \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ &= a^2 - ab + b^2 \quad \text{je regroupe les termes semblables} \\ &= A \end{aligned}$$

Je retrouve A . Donc, pour tous les nombres a et b , $A = B$: le pari de Zoé était gagné d'avance, pour 2023 et 1515 comme pour n'importe quels nombres, sans poser un seul calcul. ■

🔗 d) $C = \frac{a^3 + b^3}{a + b}$. Pour $a = 5$ et $b = 3$:

$$\begin{aligned} C &= \frac{5^3 + 3^3}{5 + 3} \\ &= \frac{125 + 27}{8} = \frac{152}{8} = 19 \end{aligned}$$

Pour $a = 5$ et $b = 3$, $C = 19$: même valeur que A et B . ✓

À retenir. Le fait admis en d) vient de l'identité $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$, que l'on peut vérifier en développant le membre de droite par double distributivité.

2.7. La formule de $(a+b+c)^2$ 🧮

★★★☆☆

Méthode. L'astuce du bloc, encore elle : on baptise $(a+b)$ un seul nombre, on applique une identité connue, puis on redéveloppe le bloc. C'est exactement le levier $k = a+b$ de la démonstration de la double distributivité (1.5). Modèles associés : **J3** (question a)) ; **J1** (questions b) et c)).

🔗 a) Pour $a = 1, b = 2$ et $c = 3$: $(1+2+3)^2 = 6^2 = 36$; et $1^2 + 2^2 + 3^2 + 2(1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 1) = 14 + 2 \times 11 = 36$. Les deux membres sont égaux. ✓
Non, cela ne suffit pas : ce test établit seulement le cas $a = 1, b = 2, c = 3$; il ne démontre pas la formule pour tous les nombres a, b et c .

🔗 b) Je développe le membre de gauche. Je traite $(a+b)$ comme un seul bloc : j'utilise $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$ avec $A = a+b$ et $B = c$.

$$\begin{aligned} (a+b+c)^2 &= [(a+b)+c]^2 & a+b+c &= (a+b)+c : \text{je regroupe } a+b \text{ en un bloc} \\ &= (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 & (A+B)^2 &= A^2 + 2AB + B^2 \end{aligned}$$

🔗 c) J'achève le développement et je réduis.

$$\begin{aligned} (a+b)^2 + 2(a+b)c + c^2 &= a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2 & (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \text{ et distributivité simple} \\ &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca) & & \text{j'ordonne les termes, puis je mets 2 en facteur dans les doubles produits} \end{aligned}$$

Je retrouve le membre de droite. Donc, pour tous les nombres a, b et c , $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ca)$. ■

🔗 d) Trois carrés (a^2, b^2, c^2) et trois doubles produits ($2ab, 2bc, 2ca$), un par paire de lettres : a et b, b et c, c et a . Tout y est. ✓

3. Factoriser

3.1. Facteur commun 🦋

★★★☆☆

Méthode. Modèle associé : **F1**.

🔗 a) Le facteur commun est 5 : 5 est le plus grand diviseur commun de 5 et de 15, et aucune lettre n'est présente dans les deux termes.

$$\begin{aligned} 5a + 15b &= \underline{5} \times a + \underline{5} \times 3b \\ &= \boxed{5(a + 3b)} \end{aligned}$$

Contrôle : $5(a + 3b) = 5a + 15b$. ✓

b) Le facteur commun est $3x$: 3 est le plus grand diviseur commun de 12 et de 15, et x est présent dans les deux termes, avec le plus petit exposant 1.

$$\begin{aligned} 12x^2 - 15x &= \underline{3x} \times 4x - \underline{3x} \times 5 \\ &= \boxed{3x(4x - 5)} \end{aligned}$$

Contrôle : $3x(4x - 5) = 12x^2 - 15x$. ✓

🔗 c) Le facteur commun est 7 : 7 est le plus grand diviseur commun de 7 et de 35, et x n'est pas présent dans le terme 35.

$$\begin{aligned} 7x - 35 &= \underline{7} \times x - \underline{7} \times 5 \\ &= \boxed{7(x - 5)} \end{aligned}$$

Contrôle : $7(x - 5) = 7x - 35$. ✓

d) Le facteur commun est x : 1 et 5 n'ont pas d'autre diviseur commun que 1, et x est présent dans les deux termes, avec le plus petit exposant 1.

$$\begin{aligned} x^2 - 5x &= \underline{x} \times x - \underline{x} \times 5 \\ &= \boxed{x(x - 5)} \end{aligned}$$

Contrôle : $x(x - 5) = x^2 - 5x$. ✓

- e) Le facteur commun est 2 : 2 est le plus grand diviseur commun de 8 et de 2, et x n'est pas présent dans le terme 8.

$$\begin{aligned} 8 + 2x &= 2 \times 4 + 2 \times x \\ &= \boxed{2(4 + x)} \end{aligned}$$

Contrôle : $2(4 + x) = 8 + 2x$. ✓

- f) Le facteur commun est 6a : 6 est le plus grand diviseur commun de 30 et de 36, et a est présent dans les deux termes, avec le plus petit exposant 1.

$$\begin{aligned} 30a + 36a^2 &= \underline{6a} \times 5 + \underline{6a} \times 6a \\ &= \boxed{6a(5 + 6a)} \end{aligned}$$

Contrôle : $6a(5 + 6a) = 30a + 36a^2$. ✓

Attention ! En b), $3(4x^2 - 5x)$ est déjà un produit, mais x reste commun aux deux termes de la parenthèse. L'énoncé demande d'extraire tous les facteurs communs visibles : on va jusqu'à $3x(4x - 5)$.

3.2. Facteur commun composé

★★★☆☆

Méthode. Modèle associé : **F2**.

- a) La parenthèse commune aux deux termes est $(x - 2)$.

$$\begin{aligned} A &= (x - 2)(x + 3) + (x - 2)(x + 6) \\ &= (x - 2)[(x + 3) + (x + 6)] && \text{je mets } (x - 2) \text{ en facteur} \\ &= (x - 2)(x + 3 + x + 6) && \text{je supprime les parenthèses du crochet} \\ &= \boxed{(x - 2)(2x + 9)} && \text{je réduis l'intérieur du crochet} \end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $(-1) \times 4 + (-1) \times 7 = -11$ et $(-1) \times 11 = -11$. ✓

- b) La parenthèse commune aux deux termes est $(x + 5)$.

$$\begin{aligned} B &= (x + 5)(4x - 2) - (x + 5)(9x + 1) \\ &= (x + 5)[(4x - 2) - (9x + 1)] && \text{je mets } (x + 5) \text{ en facteur} \\ &= (x + 5)(4x - 2 - 9x - 1) && \text{le signe } - \text{ change le signe de chaque terme de la parenthèse} \\ &= \boxed{(x + 5)(-5x - 3)} && \text{je réduis l'intérieur du crochet} \end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $6 \times 2 - 6 \times 10 = -48$ et $6 \times (-8) = -48$. ✓

- c) La parenthèse commune aux deux termes est $(3x + 8)$, car $(3x + 8)^2 = (3x + 8) \times (3x + 8)$.

$$\begin{aligned} C &= (3x + 8)^2 - (6x - 7)(3x + 8) \\ &= (3x + 8)[(3x + 8) - (6x - 7)] && \text{je mets } (3x + 8) \text{ en facteur} \\ &= (3x + 8)(3x + 8 - 6x + 7) && \text{le signe } - \text{ change le signe de chaque terme de la parenthèse} \\ &= (3x + 8)(-3x + 15) && \text{je réduis l'intérieur du crochet} \\ &= \boxed{3(3x + 8)(-x + 5)} && \text{je mets 3 en facteur} \end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $11^2 - (-1) \times 11 = 132$ et $3 \times 11 \times 4 = 132$. ✓

- d) La parenthèse commune aux deux termes est $(4x + 5)$, car $(4x + 5)^2 = (4x + 5) \times (4x + 5)$.

$$\begin{aligned} D &= (4x + 5)^2 - 5(4x + 5) \\ &= (4x + 5)[(4x + 5) - 5] && \text{je mets } (4x + 5) \text{ en facteur} \\ &= (4x + 5) \times 4x = \boxed{4x(4x + 5)} && \text{je réduis l'intérieur du crochet} \end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $9^2 - 5 \times 9 = 36$ et $4 \times 9 = 36$. ✓

Attention ! En c), la parenthèse commune est le second facteur du produit $(6x - 7)(3x + 8)$: on la cherche dans chaque terme, à n'importe quelle place.

3.3. Factoriser par identité : les pièges

★★★☆☆

Méthode. Modèle associé : **F3**.

- a) Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. $x^2 = x^2$ et $64 = 8^2$, donc $a = x$ et $b = 8$.

$$\begin{aligned} x^2 - 64 &= x^2 - 8^2 \\ &= \boxed{(x + 8)(x - 8)} \end{aligned}$$

Contrôle : $(x + 8)(x - 8) = x^2 - 8^2 = x^2 - 64$. ✓

- b) Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. $49x^2 = (7x)^2$ et $16 = 4^2$, donc $a = 7x$ et $b = 4$.

$$\begin{aligned} 49x^2 - 16 &= (7x)^2 - 4^2 \\ &= \boxed{(7x + 4)(7x - 4)} \end{aligned}$$

Contrôle : $(7x + 4)(7x - 4) = (7x)^2 - 4^2 = 49x^2 - 16$. ✓

- c) Trois termes, et les deux extrêmes sont des carrés : c'est peut-être un carré parfait. $x^2 = x^2$ et $1 = 1^2$, donc $a = x$ et $b = 1$; le double produit vaut $2 \times x \times 1 = 2x$: c'est bien le terme central, précédé du signe +.

$$x^2 + 2x + 1 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2$$

$$= (x + 1)^2$$

Contrôle : $(x + 1)^2 = x^2 + 2 \times x \times 1 + 1^2 = x^2 + 2x + 1$. ✓

- e) Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. $25 = 5^2$ et $100t^2 = (10t)^2$, donc $a = 5$ et $b = 10t$.

$$25 - 100t^2 = 5^2 - (10t)^2$$

$$= (5 + 10t)(5 - 10t)$$

$$= 5(1 + 2t) \times 5(1 - 2t) = \boxed{25(1 + 2t)(1 - 2t)}$$

Contrôle : $25(1 + 2t)(1 - 2t) = 25(1^2 - (2t)^2) = 25 - 100t^2$. ✓

- g) Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. $36z^2 = (6z)^2$ et $1 = 1^2$, donc $a = 6z$ et $b = 1$.

$$36z^2 - 1 = (6z)^2 - 1^2$$

$$= \boxed{(6z + 1)(6z - 1)}$$

Contrôle : $(6z + 1)(6z - 1) = (6z)^2 - 1^2 = 36z^2 - 1$. ✓

- i) Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. $16x^2 = (4x)^2$ et $144 = 12^2$, donc $a = 4x$ et $b = 12$.

$$16x^2 - 144 = (4x)^2 - 12^2$$

$$= (4x + 12)(4x - 12)$$

$$= 4(x + 3) \times 4(x - 3) = \boxed{16(x + 3)(x - 3)}$$

Contrôle : $16(x + 3)(x - 3) = 16(x^2 - 3^2) = 16x^2 - 144$. ✓

- k) Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. $4x^2 = (2x)^2$ et $49 = 7^2$, donc $a = 2x$ et $b = 7$.

$$4x^2 - 49 = (2x)^2 - 7^2$$

$$= \boxed{(2x + 7)(2x - 7)}$$

Contrôle : $(2x + 7)(2x - 7) = (2x)^2 - 7^2 = 4x^2 - 49$. ✓

- d) Trois termes, et les deux extrêmes sont des carrés : c'est peut-être un carré parfait. $9y^2 = (3y)^2$ et $16 = 4^2$, donc $a = 3y$ et $b = 4$; le double produit vaut $2 \times 3y \times 4 = 24y$: c'est bien le terme central, précédé du signe $-$.

$$9y^2 - 24y + 16 = (3y)^2 - 2 \times 3y \times 4 + 4^2$$

$$= \boxed{(3y - 4)^2}$$

Contrôle : $(3y - 4)^2 = (3y)^2 - 2 \times 3y \times 4 + 4^2 = 9y^2 - 24y + 16$. ✓

- f) Trois termes, et les deux extrêmes sont des carrés : c'est peut-être un carré parfait. $64 = 8^2$ et $25x^2 = (5x)^2$, donc $a = 8$ et $b = 5x$; le double produit vaut $2 \times 8 \times 5x = 80x$: c'est bien le terme central, précédé du signe $-$.

$$64 - 80x + 25x^2 = 8^2 - 2 \times 8 \times 5x + (5x)^2$$

$$= \boxed{(8 - 5x)^2}$$

Contrôle : $(8 - 5x)^2 = 8^2 - 2 \times 8 \times 5x + (5x)^2 = 64 - 80x + 25x^2$. ✓

- h) Deux termes séparés par un signe $-$; x^2 est un carré, mais 13 n'est pas le carré d'un entier ($3^2 = 9$ et $4^2 = 16$), et aucun nombre connu dans ce chapitre n'a pour carré 13 (on l'admet) : je ne peux pas nommer b. Pas de factorisation pour l'instant : ce blocage est provisoire, car le nombre positif dont le carré vaut 13, noté $\sqrt{13}$, sera défini au chapitre 02.

- j) Deux termes séparés par un signe $+$: ce n'est pas une différence de deux carrés, et ce n'est pas un carré parfait, qui aurait trois termes.

Aucune des trois identités ne s'applique : ce blocage n'est pas provisoire dans le cadre du chapitre, car aucune des trois identités ne transforme une somme de deux carrés en produit.

- l) Trois termes, et les deux extrêmes sont des carrés : c'est peut-être un carré parfait. $x^2 = x^2$ et $100 = 10^2$, donc $a = x$ et $b = 10$; le double produit vaut $2 \times x \times 10 = 20x$: c'est bien le terme central, précédé du signe $-$.

$$x^2 - 20x + 100 = x^2 - 2 \times x \times 10 + 10^2$$

$$= \boxed{(x - 10)^2}$$

Contrôle : $(x - 10)^2 = x^2 - 2 \times x \times 10 + 10^2 = x^2 - 20x + 100$. ✓

- Les deux cas où aucune des trois identités ne permet de conclure sont h) et j).

À retenir. En e) et en i), on peut aussi mettre d'abord le nombre en facteur : $16x^2 - 144 = 16(x^2 - 9) = 16(x + 3)(x - 3)$. Les deux chemins donnent le même produit ; le second fait voir le facteur 16 dès la première ligne.

3.4. Différences de carrés emboîtées

★★★☆☆

Méthode. Modèle associé : **F3**.

- a) Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. $(x + 1)^2$ est le carré du bloc $x + 1$ et $36 = 6^2$, donc $a = x + 1$ et $b = 6$.

$$A = (x + 1)^2 - 36$$

$$= (x + 1)^2 - 6^2$$

$$= [(x + 1) + 6][(x + 1) - 6] \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$= \boxed{(x + 7)(x - 5)} \quad \text{je réduis chaque facteur}$$

Contrôle : $(x + 7)(x - 5) = x^2 - 5x + 7x - 35 = x^2 + 2x - 35$ et $(x + 1)^2 - 36 = x^2 + 2x + 1 - 36 = x^2 + 2x - 35$. ✓

🔑 **b)** Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. $25 = 5^2$ et $(2x+3)^2$ est le carré du bloc $2x+3$, donc $a = 5$ et $b = 2x+3$.

$$\begin{aligned} B &= 25 - (2x+3)^2 \\ &= 5^2 - (2x+3)^2 \\ &= [5 + (2x+3)][5 - (2x+3)] & a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \\ &= (5+2x+3)(5-2x-3) & \text{le signe } - &\text{change le signe de chaque terme de la parenthèse} \\ &= (2x+8)(-2x+2) & \text{je réduis chaque facteur} \\ &= 2(x+4) \times 2(-x+1) = \boxed{4(x+4)(-x+1)} & \text{je mets 2 en facteur dans chaque facteur} \end{aligned}$$

Contrôle : $4(x+4)(-x+1) = 4(-x^2+x-4x+4) = -4x^2-12x+16$ et $25 - (2x+3)^2 = 25 - (4x^2+12x+9) = -4x^2-12x+16$. ✓

🔑 **c)** Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. $4x^2 = (2x)^2$ et $(x-5)^2$ est le carré du bloc $x-5$, donc $a = 2x$ et $b = x-5$.

$$\begin{aligned} C &= 4x^2 - (x-5)^2 \\ &= (2x)^2 - (x-5)^2 \\ &= [2x + (x-5)][2x - (x-5)] & a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \\ &= (2x+x-5)(2x-x+5) & \text{le signe } - &\text{change le signe de chaque terme de la parenthèse} \\ &= \boxed{(3x-5)(x+5)} & \text{je réduis chaque facteur} \end{aligned}$$

Contrôle : $(3x-5)(x+5) = 3x^2+15x-5x-25 = 3x^2+10x-25$ et $4x^2 - (x-5)^2 = 4x^2 - (x^2-10x+25) = 3x^2+10x-25$. ✓

🔑 **d)** Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. $(8x-4)^2$ est le carré du bloc $8x-4$ et $9x^2 = (3x)^2$, donc $a = 8x-4$ et $b = 3x$.

$$\begin{aligned} D &= (8x-4)^2 - 9x^2 \\ &= (8x-4)^2 - (3x)^2 \\ &= [(8x-4) + 3x][(8x-4) - 3x] & a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \\ &= \boxed{(11x-4)(5x-4)} & \text{je réduis chaque facteur} \end{aligned}$$

Contrôle : $(11x-4)(5x-4) = 55x^2-44x-20x+16 = 55x^2-64x+16$ et $(8x-4)^2 - 9x^2 = 64x^2-64x+16-9x^2 = 55x^2-64x+16$. ✓

3.5. Le tableau va-et-vient 🔄

★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **D2** ; **F3**.

🔑 J'utilise $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 30$.

$$\begin{aligned} (x+30)^2 &= x^2 + 2 \times x \times 30 + 30^2 \\ &= \boxed{x^2 + 60x + 900} \end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $31^2 = 961$ et $1 + 60 + 900 = 961$. ✓

Trois termes, et les deux extrêmes sont des carrés : c'est peut-être un carré parfait. $x^2 = x^2$ et $36 = 6^2$, donc $a = x$ et $b = 6$; le double produit vaut $2 \times x \times 6 = 12x$: c'est bien le terme central, précédé du signe $-$.

$$\begin{aligned} x^2 - 12x + 36 &= x^2 - 2 \times x \times 6 + 6^2 \\ &= \boxed{(x-6)^2} \end{aligned}$$

Contrôle : $(x-6)^2 = x^2 - 2 \times x \times 6 + 6^2 = x^2 - 12x + 36$. ✓

🔑 Trois termes, et les deux extrêmes sont des carrés : c'est peut-être un carré parfait. $25y^2 = (5y)^2$ et $25 = 5^2$, donc $a = 5y$ et $b = 5$; le double produit vaut $2 \times 5y \times 5 = 50y$: c'est bien le terme central, précédé du signe $+$.

$$\begin{aligned} 25y^2 + 50y + 25 &= (5y)^2 + 2 \times 5y \times 5 + 5^2 \\ &= \boxed{(5y+5)^2} \end{aligned}$$

Contrôle : $(5y+5)^2 = (5y)^2 + 2 \times 5y \times 5 + 5^2 = 25y^2 + 50y + 25$. ✓

J'utilise $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ avec $a = t$ et $b = 8$.

$$\begin{aligned} (t-8)(t+8) &= t^2 - 8^2 \\ &= \boxed{t^2 - 64} \end{aligned}$$

Contrôle ($t = 1$) : $(-7) \times 9 = -63$ et $1 - 64 = -63$. ✓

🔑 Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. $x^2 = x^2$ et $81 = 9^2$, donc $a = x$ et $b = 9$.

$$\begin{aligned} x^2 - 81 &= x^2 - 9^2 \\ &= \boxed{(x+9)(x-9)} \end{aligned}$$

Contrôle : $(x+9)(x-9) = x^2 - 9^2 = x^2 - 81$. ✓

J'utilise $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 7t$ et $b = 5$.

$$\begin{aligned} (7t-5)^2 &= (7t)^2 - 2 \times 7t \times 5 + 5^2 \\ &= \boxed{49t^2 - 70t + 25} \end{aligned}$$

Contrôle ($t = 1$) : $2^2 = 4$ et $49 - 70 + 25 = 4$. ✓

Le tableau complété :

Forme factorisée	Forme développée
$(x + 30)^2$	$x^2 + 60x + 900$
$(x - 6)^2$	$x^2 - 12x + 36$
$(5y + 5)^2$	$25y^2 + 50y + 25$
$(t - 8)(t + 8)$	$t^2 - 64$
$(x + 9)(x - 9)$	$x^2 - 81$
$(7t - 5)^2$	$49t^2 - 70t + 25$

À retenir. En ligne 3, on peut aller plus loin : $(5y + 5)^2 = [5(y + 1)]^2 = 25(y + 1)^2$. Les deux écritures sont des formes factorisées exactes ; la première montre l'identité qui relie les deux colonnes.

3.6. La copie de Louise (chasse à l'erreur)

★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **D1** (question a)) ; **T3** (question b)) ; **F3** (question c)).

a)

$$\begin{aligned} 4x(x - 1) &= 4x \times x + 4x \times (-1) \\ &= \boxed{4x^2 - 4x} \quad \text{je calcule chaque produit} \end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $4 \times 1 \times 0 = 0$ et $4 - 4 = 0$. ✓

Ce n'est pas E : le terme $\boxed{+1}$ a disparu.

b) Pour $x = 1$, $E = 4 \times 1^2 - 4 \times 1 + 1 = 1$ mais $4x(x - 1) = 4 \times 1 \times 0 = 0$: comme $1 \neq 0$, l'égalité $E = 4x(x - 1)$ n'est pas vraie pour tout nombre x ; la factorisation de Louise est fautive.

c) Trois termes, et les deux extrêmes sont des carrés : c'est peut-être un carré parfait. $4x^2 = (2x)^2$ et $1 = 1^2$, donc $a = 2x$ et $b = 1$; le double produit vaut $2 \times 2x \times 1 = 4x$: c'est bien le terme central, précédé du signe $-$.

$$\begin{aligned} E &= 4x^2 - 4x + 1 \\ &= (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2 \\ &= \boxed{(2x - 1)^2} \quad a^2 - 2ab + b^2 = (a - b)^2 \end{aligned}$$

Contrôle : $(2x - 1)^2 = (2x)^2 - 2 \times 2x \times 1 + 1^2 = 4x^2 - 4x + 1$. ✓

d) Le test en $x = 1$ donne deux valeurs différentes : il suffit à réfuter la copie de Louise. Le redéveloppement de $(2x - 1)^2$ redonne E pour tout nombre x : il prouve l'égalité.

À retenir. Un accord en une seule valeur ne prouve rien : pour $x = 0$, $(x + 2)^2$ et $x^2 + 4$ valent tous deux 4, et pourtant $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$.

3.7. Factoriser par groupement de termes

★★★☆☆

Méthode. Quatre termes, ni facteur commun visible, ni identité : on groupe deux par deux, on factorise chaque groupe, et on cherche une parenthèse commune. Si le groupement choisi ne la fait pas apparaître, on en change : l'échec d'un groupement ne prouve rien. Modèles associés : **F1** (questions a) et b)) ; **F2** (questions a), c) et d)) ; **F3** (question c)).

a) Je groupe les termes deux par deux et je factorise chaque groupe : la parenthèse $(b + 1)$ est commune aux deux groupes.

$$\begin{aligned} A &= ab + a + b + 1 \\ &= (ab + a) + (b + 1) \quad \text{je groupe les termes deux par deux} \\ &= a(b + 1) + (b + 1) \times 1 \quad \text{je factorise chaque groupe} \\ &= \boxed{(a + 1)(b + 1)} \quad \text{je mets } (b + 1) \text{ en facteur} \end{aligned}$$

Contrôle : $(a + 1)(b + 1) = ab + a + b + 1$. ✓

b)

$$\begin{aligned} B &= (a^2 - a) - (x^2 + x) \quad \text{je groupe les termes deux par deux} \\ &= a(a - 1) - x(x + 1) \quad \text{je factorise chaque groupe} \end{aligned}$$

Les parenthèses $(a - 1)$ et $(x + 1)$ sont différentes, aucune parenthèse commune n'apparaît, donc je suis bloqué. Cela ne prouve pas que l'expression ne peut pas être factorisée : seul ce groupement échoue, et je dois essayer un autre groupement.

 c) Je regroupe les deux carrés ensemble : la parenthèse $(a+x)$ devient commune aux deux groupes.

$$\begin{aligned} B &= (a^2 - x^2) - (a+x) && \text{je groupe les deux carrés ensemble} \\ &= (a-x)(a+x) - (a+x) \times 1 && A^2 - B^2 = (A-B)(A+B) \text{ avec } A=a \text{ et } B=x \\ &= (a+x) \left[(a-x) - 1 \right] && \text{je mets } (a+x) \text{ en facteur} \\ &= \boxed{(a+x)(a-x-1)} && \text{je supprime les parenthèses du crochet} \end{aligned}$$

 d) Contrôle ($a=3$ et $x=1$) : $B=9-3-1-1=4$; et $(3+1)(3-1-1)=4 \times 1=4$. ✓

4. Le calcul malin (la récompense)

4.1. Les carrés voisins des nombres ronds

★★☆☆

Méthode. Modèle associé : C1.

 a) J'utilise $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a=100$ et $b=1$, car $101=100+1$.

$$\begin{aligned} 101^2 &= (100+1)^2 = 100^2 + 2 \times 100 \times 1 + 1^2 \\ &= 10\,000 + 200 + 1 = \boxed{10\,201} \end{aligned}$$

Contrôle : le chiffre des unités est celui de $1 \times 1 = 1$, et 10 201 est un peu plus grand que $100^2 = 10\,000$. ✓

b) J'utilise $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a=100$ et $b=1$, car $99=100-1$.

$$\begin{aligned} 99^2 &= (100-1)^2 = 100^2 - 2 \times 100 \times 1 + 1^2 \\ &= 10\,000 - 200 + 1 = \boxed{9\,801} \end{aligned}$$

Contrôle : le chiffre des unités est celui de $9 \times 9 = 81$, soit 1, et 9 801 est un peu plus petit que $100^2 = 10\,000$. ✓

 c) J'utilise $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ avec $a=100$ et $b=2$, car $102=100+2$ et $98=100-2$.

$$\begin{aligned} 102 \times 98 &= (100+2)(100-2) = 100^2 - 2^2 \\ &= 10\,000 - 4 = \boxed{9\,996} \end{aligned}$$

Contrôle : le chiffre des unités est celui de $2 \times 8 = 16$, soit 6, et 9 996 est un peu plus petit que $100^2 = 10\,000$. ✓

d) J'utilise $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ avec $a=100$ et $b=3$, car $103=100+3$ et $97=100-3$.

$$\begin{aligned} 103 \times 97 &= (100+3)(100-3) = 100^2 - 3^2 \\ &= 10\,000 - 9 = \boxed{9\,991} \end{aligned}$$

Contrôle : le chiffre des unités est celui de $3 \times 7 = 21$, soit 1, et 9 991 est un peu plus petit que $100^2 = 10\,000$. ✓

 e) J'utilise $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a=20$ et $b=1$, car $21=20+1$.

$$\begin{aligned} 21^2 &= (20+1)^2 = 20^2 + 2 \times 20 \times 1 + 1^2 \\ &= 400 + 40 + 1 = \boxed{441} \end{aligned}$$

Contrôle : le chiffre des unités est celui de $1 \times 1 = 1$, et 441 est un peu plus grand que $20^2 = 400$. ✓

f) J'utilise $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a=20$ et $b=1$, car $19=20-1$.

$$\begin{aligned} 19^2 &= (20-1)^2 = 20^2 - 2 \times 20 \times 1 + 1^2 \\ &= 400 - 40 + 1 = \boxed{361} \end{aligned}$$

Contrôle : le chiffre des unités est celui de $9 \times 9 = 81$, soit 1, et 361 est un peu plus petit que $20^2 = 400$. ✓

 g) J'utilise $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a=30$ et $b=5$, car $35=30+5$.

$$\begin{aligned} 35^2 &= (30+5)^2 = 30^2 + 2 \times 30 \times 5 + 5^2 \\ &= 900 + 300 + 25 = \boxed{1\,225} \end{aligned}$$

Contrôle : le chiffre des unités est celui de $5 \times 5 = 25$, soit 5, et 1 225 est compris entre $30^2 = 900$ et $40^2 = 1\,600$. ✓

h) J'utilise $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a=1\,000$ et $b=1$, car $1\,001=1\,000+1$.

$$\begin{aligned} 1\,001^2 &= (1\,000+1)^2 = 1\,000^2 + 2 \times 1\,000 \times 1 + 1^2 \\ &= 1\,000\,000 + 2\,000 + 1 = \boxed{1\,002\,001} \end{aligned}$$

Contrôle : le chiffre des unités est celui de $1 \times 1 = 1$, et 1 002 001 est un peu plus grand que $1\,000^2 = 1\,000\,000$. ✓

4.2. En une seule multiplication

★★☆☆

Méthode. Modèle associé : C2.

 a) J'utilise $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ avec $a=73$ et $b=67$.

$$\begin{aligned} 73^2 - 67^2 &= (73+67)(73-67) \\ &= 140 \times 6 = \boxed{840} \end{aligned}$$

Contrôle : 73^2 se termine comme $3 \times 3 = 9$, par 9 ; 67^2 se termine comme $7 \times 7 = 49$, par 9 ; la différence se termine donc par 0, comme 840. ✓

b) J'utilise $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ avec $a=101$ et $b=99$.

$$\begin{aligned} 101^2 - 99^2 &= (101+99)(101-99) \\ &= 200 \times 2 = \boxed{400} \end{aligned}$$

Contrôle : 101^2 se termine comme $1 \times 1 = 1$, par 1 ; 99^2 se termine comme $9 \times 9 = 81$, par 1 ; la différence se termine donc par 0, comme 400. ✓

 c) J'utilise $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ avec $a=43$ et $b=42$.

$$\begin{aligned} 43^2 - 42^2 &= (43+42)(43-42) \\ &= 85 \times 1 = \boxed{85} \end{aligned}$$

Contrôle : 43^2 se termine comme $3 \times 3 = 9$, par 9 ; 42^2 se termine comme $2 \times 2 = 4$, par 4 ; la différence se termine donc par 5, comme 85. ✓

d) J'utilise $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ avec $a=8,5$ et $b=1,5$.

$$\begin{aligned} 8,5^2 - 1,5^2 &= (8,5+1,5)(8,5-1,5) \\ &= 10 \times 7 = \boxed{70} \end{aligned}$$

Contrôle : $8,5^2$ et $1,5^2$ se terminent tous deux par 25 après la virgule, comme $5 \times 5 = 25$; la différence n'a donc pas de chiffre après la virgule, comme 70. ✓

 e) J'utilise $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$ avec $a=45$ et $b=5$.

$$\begin{aligned} 45^2 + 2 \times 45 \times 5 + 5^2 &= (45+5)^2 \\ &= 50^2 = \boxed{2\,500} \end{aligned}$$

Contrôle : les chiffres des unités des trois termes sont 5, 0 et 5, et $5+0+5=10$ se termine par 0, comme 2 500. ✓

f) J'utilise $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$ avec $a=14$ et $b=4$.

$$\begin{aligned} 14^2 - 2 \times 14 \times 4 + 4^2 &= (14-4)^2 \\ &= 10^2 = \boxed{100} \end{aligned}$$

Contrôle : les chiffres des unités des trois termes sont 6, 2 et 6, et $6-2+6=10$ se termine par 0, comme 100. ✓

4.3. L'aire entre deux carrés

★★☆

Méthode. Modèles associés : **T1** (questions a) et b)) ; **C2** (question a)) ; **J1** (question c)).

a) Je sais que le grand carré a 51 m de côté et que le petit carré, placé dans un coin du grand, a 50 m de côté. Je cherche l'aire $\mathcal{A}$ de la bordure grise : c'est l'aire du grand carré moins l'aire du petit carré, donc $\mathcal{A} = 51^2 - 50^2$, en m^2 . J'utilise $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = 51$ et $b = 50$: $\mathcal{A} = (51 + 50)(51 - 50) = 101 \times 1 = 101$.

Conclusion : la bordure grise a une aire de $\boxed{\mathcal{A} = 101 \text{ m}^2}$.

b) Vérification : la bordure grise est formée de deux bandes de 1 m de large ; chacune mesure environ 50 m de long, d'où une aire d'environ $2 \times 50 \times 1 = \boxed{100 \text{ m}^2}$: 101 m^2 est vraisemblable. ✓

c) L'aire entre les deux carrés est l'aire du grand carré moins l'aire du petit carré : je dois prouver que $(n + 1)^2 - n^2 = 2n + 1$. Je développe le membre de gauche.

$$\begin{aligned} (n + 1)^2 - n^2 &= n^2 + 2n + 1 - n^2 & (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &= 2n + 1 & \text{je regroupe les termes semblables} \end{aligned}$$

Je retrouve le membre de droite. Donc, pour tout nombre $n > 0$, l'aire entre les deux carrés vaut $(n + 1)^2 - n^2 = \boxed{2n + 1}$. ■

Dans le cours, l'expression $2n + 1$ est l'écriture d'un nombre impair quand n est entier ; elle apparaît aussi dans le développement $(n + 1)^2 = n^2 + 2n + 1$ de l'exercice 2.1 h) : c'est ce qu'il faut ajouter à n^2 pour obtenir $(n + 1)^2$.

4.4. Champions : la cour des grands

★★★

Méthode. Modèles associés : **C1** (questions a), b) et c)) ; **C2** (question d)).

a) J'utilise $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 1\,000$ et $b = 5$, car $1\,005 = 1\,000 + 5$.

$$\begin{aligned} 1\,005^2 &= (1\,000 + 5)^2 = 1\,000^2 + 2 \times 1\,000 \times 5 + 5^2 \\ &= 1\,000\,000 + 10\,000 + 25 = \boxed{1\,010\,025} \end{aligned}$$

Contrôle : le chiffre des unités est celui de $5 \times 5 = 25$, soit 5, et 1 010 025 est un peu plus grand que $1\,000^2 = 1\,000\,000$. ✓

b) J'utilise $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ avec $a = 10$ et $b = 0,1$, car $10,1 = 10 + 0,1$ et $9,9 = 10 - 0,1$.

$$\begin{aligned} 10,1 \times 9,9 &= (10 + 0,1)(10 - 0,1) = 10^2 - 0,1^2 \\ &= 100 - 0,01 = \boxed{99,99} \end{aligned}$$

Contrôle : le dernier chiffre est celui de $1 \times 9 = 9$, et 99,99 est un peu plus petit que $10^2 = 100$. ✓

c) J'utilise la distributivité $k(a - b) = ka - kb$ avec $k = 38$, $a = 1\,000$ et $b = 2$, car $998 = 1\,000 - 2$ et seul 998 est proche d'un nombre rond : une identité demanderait deux facteurs également éloignés d'un même nombre rond.

$$\begin{aligned} 38 \times 998 &= 38 \times (1\,000 - 2) = 38 \times 1\,000 - 38 \times 2 \\ &= 38\,000 - 76 = \boxed{37\,924} \end{aligned}$$

Contrôle : le chiffre des unités est celui de $8 \times 8 = 64$, soit 4, et 37 924 est un peu plus petit que $38 \times 1\,000 = 38\,000$. ✓

d) J'utilise $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = 2\,026$ et $b = 2\,025$.

$$\begin{aligned} 2\,026^2 - 2\,025^2 &= (2\,026 + 2\,025)(2\,026 - 2\,025) \\ &= 4\,051 \times 1 = 4\,051 \end{aligned}$$

Contrôle : $2\,026^2$ se termine comme $6 \times 6 = 36$, par 6 ; $2\,025^2$ se termine comme $5 \times 5 = 25$, par 5 ; la différence se termine donc par 1, comme 4 051. ✓
Donc $2\,026^2 - 2\,025^2 - 4\,051 = 4\,051 - 4\,051 = \boxed{0}$.

Attention ! En c), une identité est possible, $38 \times 998 = (518 - 480)(518 + 480) = 518^2 - 480^2$, mais elle demande deux carrés de grands nombres : elle est applicable, pas avantageuse.

4.5. Contrôler sans calculer

★★☆

Méthode. Modèles associés : **T3** (questions a), b) et d)) ; **C1** (question c)).

a) Pour $x = 1$, $(x + 10)^2 = 11^2 = 121$ mais $x^2 + 100 = 1 + 100 = 101$: comme $121 \neq 101$, l'égalité n'est pas vraie pour tout nombre x .

b) Pour $t = 1$, $25 - 100t^2 = 25 - 100 = -75$ mais $(5 - 10t)^2 = (-5)^2 = 25$: comme $-75 \neq 25$, l'égalité n'est pas vraie pour tout nombre t .

c) J'utilise $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ avec $a = 50$ et $b = 3$, car $47 = 50 - 3$ et $53 = 50 + 3$: $47 \times 53 = (50 - 3)(50 + 3) = 50^2 - 3^2 = 2\,500 - 9 = 2\,491$, et comme $2\,491 \neq 2\,500$, l'affirmation est fausse.

d) Pour $x = 1$, $(3x)^2 = 3^2 = 9$ mais $3x^2 = 3 \times 1 = 3$: comme $9 \neq 3$, l'égalité n'est pas vraie pour tout nombre x .

À retenir. D'autres réfutations en une phrase sont possibles : en b), pour $t = 1$, le membre de gauche est strictement négatif, alors qu'un carré est toujours positif ou nul ; en c), 47×53 se termine comme $7 \times 3 = 21$, par 1, alors que 2 500 se termine par 0.

4.6. Périmètre fixé, aire maximale : le carré gagne

★★★☆

Méthode. Modèles associés : **D2** (question c)) ; **J1** (question d)).

 a) Les trois ont pour périmètre $2 \times (12 + 8) = 2 \times (15 + 5) = 2 \times (10,5 + 9,5) = 40$ m. ✓ Aires, en m^2 :

$$12 \times 8 = \boxed{96}, \quad 15 \times 5 = \boxed{75}, \quad 10,5 \times 9,5 = \boxed{99,75}.$$

 b) Si le périmètre vaut 40 m, la somme des deux dimensions vaut 20 m. Après avoir nommé la plus grande en premier, je note d son écart à 10 : la plus grande vaut $10 + d$, avec $d \geq 0$ car elle est au moins égale à la moitié de 20, et la plus petite vaut $20 - (10 + d) = 10 - d$. Comme c'est une longueur, $10 - d > 0$, donc $d < 10$. Ainsi $0 \leq d < 10$.

 c) J'utilise $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ avec $a = 10$ et $b = d$.

$$\begin{aligned} (10 + d)(10 - d) &= 10^2 - d^2 \\ &= 100 - d^2 \end{aligned}$$

Contrôle ($d = 2$, côtés 12 et 8) : $100 - 2^2 = 96$, l'aire trouvée en a). ✓

Comme $d^2 \geq 0$, l'aire $100 - d^2$ ne dépasse jamais 100 m^2 ; elle vaut 100 m^2 uniquement pour $d = 0$, c'est-à-dire pour le carré 10×10 .

 d) Soient $x > 0$ et $y > 0$ les côtés, avec $xy = 100$. Je pars de $(x - y)^2 \geq 0$, vrai car un carré est toujours positif ou nul.

$$\begin{aligned} x^2 - 2xy + y^2 &\geq 0 & (a - b)^2 &= a^2 - 2ab + b^2 \\ x^2 + 2xy + y^2 &\geq 4xy & \text{j'ajoute } 4xy &\text{aux deux membres} \\ (x + y)^2 &\geq 4 \times 100 = 400 & a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2, \text{ et } xy = 100 \end{aligned}$$

Puisque $x + y > 0$, j'obtiens $x + y \geq 20$, donc $2(x + y) \geq 40$. L'égalité $2(x + y) = 40$ impose $(x - y)^2 = 0$, d'où $x = y = 10$.

Donc, pour tout rectangle d'aire 100 m^2 , le périmètre est au moins 40 m, et il vaut 40 m seulement pour le carré 10×10 . ■

Conclusion : à périmètre fixé, le carré a la plus grande aire ; à aire fixée, il a le plus petit périmètre.

À retenir. L'identité $a^2 - b^2$ résout un problème d'optimisation sans aucune fonction : parmi les rectangles de périmètre fixé, le carré est celui de plus grande aire.

5. Programmes de calcul et démonstrations

5.1. Le programme d'Arthur : deux essais ne suffisent pas pour conclure pour tout x

★★★☆

Méthode. Modèles associés : **P1** (questions a), b) et c)) ; **P2** (question c)) ; **J3** (question d)) ; **J1** (question d)).

 a) Avec 2 au départ : $2 \times (-2) = -4$; $-4 + 5 = 1$; $1 \times 5 = 5$. J'obtiens bien 5. ✓

 b) Avec 3 au départ : $3 \times (-2) = -6$; $-6 + 5 = -1$; $-1 \times 5 = -5$. Le résultat est -5 .

 c) Avec x au départ :

Je multiplie par -2 : $-2x$.

J'ajoute 5 : $-2x + 5$.

Je multiplie le résultat par 5 : $5(-2x + 5)$.

Le résultat est $5(-2x + 5) = 5 \times (-2x) + 5 \times 5 = -10x + 25$.

Je cherche x tel que $-10x + 25 = 0$.

$$\begin{aligned} -10x + 25 &= 0 \\ -10x &= 0 - 25 = -25 & \text{je soustrais 25 aux deux membres} \\ x &= \frac{-25}{-10} = 2,5 & \text{je divise les deux membres par } -10 \end{aligned}$$

Conclusion : il faut choisir $x = 2,5$ comme nombre de départ.

Vérification : $2,5 \times (-2) = -5$; $-5 + 5 = 0$; $0 \times 5 = 0$. ✓

 d) Pour $x = 2$, $(x - 5)^2 - x^2 = (2 - 5)^2 - 2^2 = (-3)^2 - 4 = 9 - 4 = 5$; pour $x = 3$, $(x - 5)^2 - x^2 = (3 - 5)^2 - 3^2 = (-2)^2 - 9 = 4 - 9 = -5$: ce sont les résultats du programme trouvés en a) et b).

Ces exemples établissent seulement les cas testés : l'affirmation porte sur une infinité de nombres, il faut donc une démonstration avec une lettre. Ces deux tests ne permettent pas de trancher.

Je développe chaque expression.

$$\begin{aligned} 5(-2x + 5) &= -10x + 25 & \text{distributivité simple} \\ (x - 5)^2 - x^2 &= x^2 - 10x + 25 - x^2 & (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \\ &= -10x + 25 & \text{je regroupe les termes semblables} \end{aligned}$$

Les deux expressions sont égales à $-10x + 25$. Donc, pour tout nombre x , $(x - 5)^2 - x^2$ donne le résultat du programme : Arthur a raison. ■

✎ Modifier, créer, résoudre

1. Je prévois que le nombre de départ qui donne 0 ne change pas : avec 2,5 au départ, le résultat avant la dernière multiplication vaut déjà 0, comme à la question c), et $0 \times 3 = 0$. Je le vérifie littéralement.

Avec x au départ :

Je multiplie par -2 : $-2x$.

J'ajoute 5 : $-2x + 5$.

Je multiplie le résultat par 3 : $3(-2x + 5)$.

Le résultat est $3(-2x + 5) = 3 \times (-2x) + 3 \times 5 = -6x + 15$.

Je cherche x tel que $-6x + 15 = 0$.

$$-6x + 15 = 0$$

$$-6x = 0 - 15 = -15 \quad \text{je soustrais 15 aux deux membres}$$

$$x = \frac{-15}{-6} = 2,5 \quad \text{je divise les deux membres par } -6$$

Conclusion : il faut encore choisir $x = 2,5$ comme nombre de départ ; il ne change pas.

Vérification : $2,5 \times (-2) = -5$; $-5 + 5 = 0$; $0 \times 3 = 0$. ✓

✎ 2. Je propose ce programme : « Choisir un nombre ; le multiplier par 3 ; soustraire 6 ; multiplier le résultat par 2. » Pour un nombre de départ x , ce programme donne $2(3x - 6) = 2 \times 3x + 2 \times (-6) = 6x - 12$.

3. Avec x au départ :

Je multiplie par 3 : $3x$.

Je soustrais 6 : $3x - 6$.

Je multiplie le résultat par 2 : $2(3x - 6)$.

Le résultat est $2(3x - 6) = 2 \times 3x + 2 \times (-6) = 6x - 12$.

Avec 0 au départ : $0 \times 3 = 0$; $0 - 6 = -6$; $-6 \times 2 = -12$. J'obtiens bien $6 \times 0 - 12 = -12$. ✓

Avec 5 au départ : $5 \times 3 = 15$; $15 - 6 = 9$; $9 \times 2 = 18$. J'obtiens bien $6 \times 5 - 12 = 30 - 12 = 18$. ✓

Attention ! Une erreur fréquente en d) consiste à développer $(x - 5)^2$ en $x^2 - 25$: le double produit $-10x$ disparaît, et l'expression d'Arthur vaudrait -25 pour tout nombre x , alors que le programme donne 5 pour $x = 2$.

À retenir. Si l'un des deux tests n'avait pas concordé, il aurait suffi à donner tort à Arthur : c'est un contre-exemple.

5.2. Deux programmes, un même résultat ?

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **P1** (questions a) et b)) ; **J3** (question a)) ; **J1** (question b)).

✎ a) Avec 3 au départ, programme A : $3 - 1 = 2$; $2^2 = 4$; $4 - 1 = 3$. Le résultat est 3.

Avec 3 au départ, programme B : $3 - 2 = 1$; $1 \times 3 = 3$. Le résultat est 3.

Avec 10 au départ, programme A : $10 - 1 = 9$; $9^2 = 81$; $81 - 1 = 80$. Le résultat est 80.

Avec 10 au départ, programme B : $10 - 2 = 8$; $8 \times 10 = 80$. Le résultat est 80.

Avec -5 au départ, programme A : $-5 - 1 = -6$; $(-6)^2 = 36$; $36 - 1 = 35$. Le résultat est 35.

Avec -5 au départ, programme B : $-5 - 2 = -7$; $-7 \times (-5) = 35$. Le résultat est 35.

Pour chacun des trois nombres, les deux programmes donnent le même résultat. Il semble que les deux programmes donnent toujours le même résultat. Ces exemples établissent seulement les cas testés : l'affirmation porte sur une infinité de nombres, il faut donc une démonstration avec une lettre.

✎ b) Avec x au départ, programme A :

Je soustrais 1 : $x - 1$.

J'élève au carré : $(x - 1)^2$.

Je soustrais 1 : $(x - 1)^2 - 1$.

Avec x au départ, programme B :

Je soustrais 2 : $x - 2$.

Je multiplie par le nombre choisi : $(x - 2) \times x = x(x - 2)$.

Je développe chaque expression.

$$(x - 1)^2 - 1 = x^2 - 2x + 1 - 1 = x^2 - 2x \quad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$x(x - 2) = x^2 - 2x \quad \text{distributivité simple}$$

Les deux expressions sont égales à $x^2 - 2x$. Donc, pour tout nombre x , les programmes A et B donnent le même résultat : la conjecture est démontrée. ■

Attention ! Avec -5 au départ, le programme A élève -6 au carré : $(-6)^2 = 36$, et non -36 . Le carré d'un nombre négatif est positif.

5.3. Type Brevet : le programme au carré

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **P1** (questions a), b) et c)) ; **P2** (question d)).

✎ a) Avec 1 au départ : $1 + 1 = 2$; $2^2 = 4$; $4 - 1^2 = 4 - 1 = 3$. J'obtiens bien 3. ✓

✎ b) Avec 2 au départ : $2 + 1 = 3$; $3^2 = 9$; $9 - 2^2 = 9 - 4 = 5$. Le résultat est 5.

☞ c) Avec x au départ :

J'ajoute 1 : $x + 1$.

Je calcule le carré du résultat : $(x + 1)^2$.

Je soustrais le carré du nombre de départ : $(x + 1)^2 - x^2$.

Le résultat est $P = (x + 1)^2 - x^2$. Je le développe avec la double distributivité :

$$\begin{aligned} P &= (x + 1)(x + 1) - x^2 & (x + 1)^2 &= (x + 1) \times (x + 1) \\ &= x^2 + x + x + 1 - x^2 & \text{double distributivité : quatre produits} \\ &= \boxed{2x + 1} & \text{je regroupe les termes semblables} \end{aligned}$$

☞ d) Je cherche x tel que $2x + 1 = 15$.

$$2x + 1 = 15$$

$$2x = 15 - 1 = 14 \quad \text{je soustrais 1 aux deux membres}$$

$$x = \frac{14}{2} = 7 \quad \text{je divise les deux membres par 2}$$

Conclusion : il faut choisir $\boxed{x = 7}$ comme nombre de départ.

Vérification : $7 + 1 = 8$; $8^2 = 64$; $64 - 7^2 = 64 - 49 = 15$. ✓

À retenir. Après l'étude de la factorisation, la différence de deux carrés, avec $a = x + 1$ et $b = x$, donne le même résultat sans développer de carré :
 $P = [(x + 1) + x][(x + 1) - x] = (2x + 1) \times 1 = 2x + 1$.

5.4. Conjecture au tableur, preuve littérale : trois entiers consécutifs

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **J3** (questions a) et c)) ; **J2** (questions d) et e)) ; **T3** (question f)).

☞ a) $(-8) + (-7) + (-6) = -21$ et $-21 \div 3 = -7$; $7 + 8 + 9 = 24$ et $24 \div 3 = 8$; $199 + 200 + 201 = 600$ et $600 \div 3 = 200$.

Chaque somme est divisible par 3, et le quotient est à chaque fois l'entier du milieu.

☞ b) Après le prolongement, la colonne A contient les 200 entiers de -100 à 99 . En B2, je saisis $\boxed{=A2+1}$: le deuxième entier suit le premier. En C2, je saisis $\boxed{=A2+B2}$. En D2, je saisis $\boxed{=A2+B2+C2}$: la somme des trois entiers. Je recopie ensuite B2:D2 jusqu'à la ligne 201.

☞ c) Dans les 200 lignes affichées, la somme est divisible par 3, et le quotient est l'entier de la colonne B. Il semble que la somme de trois entiers consécutifs soit toujours un multiple de 3, et même le triple de l'entier du milieu.

Ces exemples établissent seulement les cas testés, les 200 cas où le premier entier va de -100 à 99 : l'affirmation porte sur une infinité d'entiers, il faut donc une démonstration avec une lettre.

☞ d) Soit n un entier quelconque. Trois entiers consécutifs s'écrivent n , $n + 1$ et $n + 2$: la lettre n désigne le premier.

Je calcule leur somme :

$$\begin{aligned} n + (n + 1) + (n + 2) &= 3n + 3 & \text{je regroupe les termes semblables} \\ &= 3(n + 1) & \text{je mets 3 en facteur} \end{aligned}$$

Or n est un entier, donc $n + 1$ est un entier : $3(n + 1)$ est un multiple de 3.

Donc, pour tout entier n , la somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3. ■

☞ e) D'après la question d), la somme vaut $3(n + 1)$. Or $n + 1$ est le deuxième des trois entiers.

Donc, pour tout entier n , la somme de trois entiers consécutifs est le triple $\boxed{\text{du deuxième entier, celui du milieu}}$. ■

f) Pour les entiers consécutifs 1, 2, 3 et 4, la somme vaut $1 + 2 + 3 + 4 = 10$, et 10 n'est pas un multiple de 4 ($4 \times 2 = 8$ et $4 \times 3 = 12$) : l'affirmation « la somme de quatre entiers consécutifs est un multiple de 4 » n'est pas vraie pour tous les entiers. $\boxed{\text{Non}}$.

À retenir. Le calcul littéral explique le contre-exemple de f) : $n + (n + 1) + (n + 2) + (n + 3) = 4n + 6 = 4(n + 1) + 2$. Le reste de la division par 4 vaut toujours 2 : la somme de quatre entiers consécutifs n'est jamais un multiple de 4.

5.5. La différence des carrés de deux impairs consécutifs

★★★★

Méthode. Modèles associés : **J3** (question a)) ; **J2** (question b)).

☞ a) $5^2 - 3^2 = 16 = 8 \times 2$; $9^2 - 7^2 = 32 = 8 \times 4$; $13^2 - 11^2 = 48 = 8 \times 6$.

Ces trois différences sont des multiples de 8. ✓

☞ b) Soit n un entier quelconque. Deux impairs consécutifs s'écrivent $2n + 1$ et $2n + 3$.

Je calcule la différence de leurs carrés par la factorisation $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$, avec $a = 2n + 3$ et $b = 2n + 1$:

$$\begin{aligned} (2n + 3)^2 - (2n + 1)^2 &= [(2n + 3) + (2n + 1)][(2n + 3) - (2n + 1)] & a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \\ &= (4n + 4) \times 2 & \text{je réduis chaque facteur} \\ &= 8n + 8 & \text{distributivité simple} \\ &= 8(n + 1) & \text{je mets 8 en facteur} \end{aligned}$$

Or n est un entier, donc $n + 1$ est un entier : $8(n + 1)$ est un multiple de 8.

Donc, pour tout entier n , la différence des carrés de deux impairs consécutifs est un $\boxed{\text{multiple de 8}}$: l'affirmation d'Anabelle est vraie. ■

☞ c) Dans $(4n + 4) \times 2$: le facteur $4n + 4$ est la somme des deux impairs, le facteur 2 est leur écart : la différence de deux carrés s'écrit « somme $\times$ écart ».

À retenir. Autre preuve du b) : le développement, avec $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, donne $4n^2 + 12n + 9 - (4n^2 + 4n + 1) = 8n + 8$. Or $8n$ et 8 sont des multiples de 8 ; leur somme l'est donc aussi, et $8n + 8 = 8(n + 1)$ rend le quotient explicite.

5.6. Divisible par 7 (écho du chapitre 01)

★★★★

Méthode. Modèle associé : **J2**.

☞ Soit n un entier positif quelconque.

Le facteur commun des trois termes est 2^n (la plus petite puissance) :

$$\begin{aligned} 2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2} &= 2^n \times 1 + 2^n \times 2 + 2^n \times 4 & 2^{n+1} &= 2^n \times 2 \\ & & \text{et } 2^{n+2} &= 2^n \times 4 \\ &= 2^n(1 + 2 + 4) & \text{je mets } 2^n &\text{en facteur} \\ &= 7 \times 2^n & \text{je calcule la parenthèse} \end{aligned}$$

Or n est un entier positif, donc 2^n est un entier : 7×2^n est le produit de 7 par un entier.

Donc, pour tout entier positif n , $2^n + 2^{n+1} + 2^{n+2}$ est divisible par 7. ■

À retenir. C'est le mot d'ordre du chapitre 01, promu au rang d'outil de démonstration : une somme de puissances ne se « regroupe » pas, elle se factorise ($4^{15} + 8^{10} = 2^{30} + 2^{30} = 2 \times 2^{30} = 2^{31}$, souvenir...).

5.7. La nappe à carreaux

★★★☆

Méthode. Compter une même collection de deux façons (par rangées, puis par sortes), traduire chaque compte en littéral, et contrôler que la somme redonne le total : c'est un double comptage, comme au carré de mosaïque du cours (partie 1). Modèles associés : **D2** et **J1** (question d)).

☞ a) Sur la figure ($n = 2$) : 9 rouges, 4 blancs, 12 rayés. Total : $9 + 4 + 12 = 25 = 5^2$. ✓

☞ b) Les rangées à coins rouges sont les rangées n^{os} 1, 3, 5, ..., $2n + 1$: il y en a $n + 1$, et chacune contient $n + 1$ rouges et n rayés. Les autres rangées (n^{os} 2, 4, ..., $2n$) sont au nombre de n , et chacune contient $n + 1$ rayés et n blancs.

☞ c) Rouges : $(n + 1) \times (n + 1) = \boxed{(n + 1)^2}$; blancs : $n \times n = \boxed{n^2}$; rayés : $(n + 1) \times n + n \times (n + 1) = \boxed{2n(n + 1)}$.

☞ d) Je développe et je réduis la somme des trois expressions.

$$\begin{aligned} (n + 1)^2 + n^2 + 2n(n + 1) &= n^2 + 2n + 1 + n^2 + 2n^2 + 2n & (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \text{ et distributivité simple} \\ &= 4n^2 + 4n + 1 & \text{je regroupe les termes semblables} \\ &= \boxed{(2n + 1)^2} & a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 \text{ avec } a = 2n \text{ et } b = 1 \end{aligned}$$

Je retrouve $(2n + 1)^2$. ✓

Ce contrôle était prévisible : les carreaux rouges, blancs et rayés remplissent tout le carré de côté $2n + 1$, qui contient $(2n + 1)^2$ carreaux. Je peux d'ailleurs lire l'égalité à l'envers : $(2n + 1)^2 = [(n + 1) + n]^2 = (n + 1)^2 + 2n(n + 1) + n^2$, c'est le carré de la somme avec $a = n + 1$ et $b = n$.

Conclusion : pour tout entier $n \geq 1$, la nappe de côté $2n + 1$ contient $(n + 1)^2$ carreaux rouges, n^2 blancs et $2n(n + 1)$ rayés, et la somme redonne bien $(2n + 1)^2$.

☞ e) Vérification pour $n = 2$: $(n + 1)^2 = 9$, $n^2 = 4$ et $2n(n + 1) = 12$: je retrouve les comptes du a). ✓

5.8. Une baisse puis une hausse du même pourcentage

★★★☆

Méthode. Modèles associés : **D2** et **J1** (question c)).

☞ a) $1000 \xrightarrow{-50\%} 500 \xrightarrow{+50\%} 500 + 250 = 750$ €. Le portefeuille a perdu 250 €, soit 25 % du capital de départ : pas 0 % !

☞ b) Perte puis hausse de 10 % : $0,9 \times 1,1 = 0,99$, le capital est multiplié par 0,99 (perte de 1 %). Avec 30 % : $0,7 \times 1,3 = 0,91$, le capital est multiplié par 0,91 (perte de 9 %). Le nombre par lequel le capital est multiplié reste toujours un peu inférieur à 1.

☞ c) Perdre la proportion x multiplie par $(1 - x)$; regagner la proportion x multiplie par $(1 + x)$. Le coefficient global est donc $(1 - x)(1 + x)$. J'utilise $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ avec $a = 1$ et $b = x$.

$$\begin{aligned} (1 - x)(1 + x) &= 1^2 - x^2 \\ &= 1 - x^2 \end{aligned}$$

Contrôle ($x = 0,5$) : $1 - 0,5^2 = 0,75$, et $0,75 \times 1000 = 750$ €, le résultat du a). ✓

Or $0 < x < 1$, donc $x \neq 0$ et $x^2 > 0$: $1 - x^2 < 1$. Donc, pour toute proportion x telle que $0 < x < 1$, le capital est multiplié par $1 - x^2$, un nombre strictement inférieur à 1 : le capital final est strictement inférieur au capital de départ. ■

☞ d) Non : $(1+x)(1-x) = (1-x)(1+x)$ (la multiplication est commutative). Dans les deux cas je multiplie par $1-x^2$: l'ordre ne change rien.

À retenir. Pour un capital initial positif et une proportion $0 < x < 1$, perdre puis regagner cette même proportion ne ramène pas au départ : le coefficient est $1-x^2 < 1$. C'est l'identité $(a+b)(a-b)$ au service d'un raisonnement financier.

Bloc transversal : Justifier et raisonner

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **D2** (question a)) ; **D1** (question a)) ; **F2** (question a)) ; **T3** (question b)) ; **T2** (question c)) ; **L1** (question c)) ; **J2** (question d)).

☞ a) La première égalité est fausse : dans $E = 4x^2 + 9 - (2x^2 + 3x - 2x - 3)$, le carré $(2x+3)^2$ est remplacé par $4x^2 + 9$. L'erreur commise est l'oubli du double produit : le carré d'une somme n'est pas la somme des carrés.

☞ Je développe chaque produit à part.

J'utilise $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 3$: $(2x+3)^2 = (2x)^2 + 2 \times 2x \times 3 + 3^2 = 4x^2 + 12x + 9$.

$$\begin{aligned}(x-1)(2x+3) &= x \times 2x + x \times 3 + (-1) \times 2x + (-1) \times 3 \\ &= 2x^2 + 3x - 2x - 3 && \text{je calcule chaque produit} \\ &= 2x^2 + x - 3 && \text{je regroupe les termes semblables}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}E &= (2x+3)^2 - (x-1)(2x+3) \\ &= (4x^2 + 12x + 9) - (2x^2 + x - 3) && \text{je remplace chaque produit par son développement} \\ &= 4x^2 + 12x + 9 - 2x^2 - x + 3 && \text{le signe } - \text{ change le signe de chaque terme de la parenthèse} \\ &= \boxed{2x^2 + 11x + 12} && \text{je regroupe les termes semblables}\end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $5^2 - 0 \times 5 = 25$ et $2 + 11 + 12 = 25$. ✓

☞ La parenthèse commune aux deux termes est $(2x+3)$, car $(2x+3)^2 = (2x+3) \times (2x+3)$.

$$\begin{aligned}E &= (2x+3)^2 - (x-1)(2x+3) \\ &= (2x+3) \left[(2x+3) - (x-1) \right] && \text{je mets } (2x+3) \text{ en facteur} \\ &= (2x+3)(2x+3-x+1) && \text{le signe } - \text{ change le signe de chaque terme de la parenthèse} \\ &= \boxed{(2x+3)(x+4)} && \text{je réduis l'intérieur du crochet}\end{aligned}$$

Vérification : en développant la forme factorisée, $(2x+3)(x+4) = 2x^2 + 8x + 3x + 12 = 2x^2 + 11x + 12$, je retrouve la forme réduite. ✓

☞ b) i) Pour $x = 1$, $(x+5)^2 = 6^2 = 36$ mais $x^2 + 25 = 1 + 25 = 26$: comme $36 \neq 26$, l'égalité n'est pas vraie pour tout nombre x .

ii) Pour $x = 1$, $(5x)^2 = 5^2 = 25$ mais $5x^2 = 5 \times 1 = 5$: comme $25 \neq 5$, l'égalité n'est pas vraie pour tout nombre x .

iii) Pour $x = 1$, $x^2 - 64 = 1 - 64 = -63$ mais $(x-8)^2 = (-7)^2 = 49$: comme $-63 \neq 49$, l'égalité n'est pas vraie pour tout nombre x .

iv) Pour $x = 1$, $x^2 + 16 = 1 + 16 = 17$ mais $(x+4)^2 = 5^2 = 25$: comme $17 \neq 25$, l'égalité n'est pas vraie pour tout nombre x .

☞ c) i) **FAUX.** Dans $3x+2$, le dernier calcul est l'addition de $3x$ et de 2 : c'est une somme, de termes $3x$ et 2 ; la multiplication $3 \times x$ est à l'intérieur du terme $3x$.

ii) **FAUX.** Contre-exemple : $x^2 + 16$. Pour tout nombre x , $x^2 \geq 0$, donc $x^2 + 16 \geq 16$: cette somme ne vaut jamais 0. Or un produit $(ax+b)(cx+d)$ de deux expressions du premier degré, avec $a \neq 0$, vaut 0 pour $x = -\frac{b}{a}$, car son premier facteur est alors nul. Donc $x^2 + 16$ ne s'écrit pas comme un tel produit, et l'affirmation n'est pas vraie pour toutes les sommes.

iii) **VRAI.** Lues de droite à gauche, les trois identités du chapitre transforment en produits $a^2 + 2ab + b^2$, $a^2 - 2ab + b^2$ et $a^2 - b^2$; aucune ne transforme la somme $a^2 + b^2$.

☞ d) Soit n un entier quelconque : la lettre n désigne n'importe quel entier, et je ne la remplace par aucune valeur.

Je calcule :

$$\begin{aligned}(n+1)^2 - n^2 &= n^2 + 2n + 1 - n^2 && (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \\ &= 2n + 1 && \text{je regroupe les termes semblables}\end{aligned}$$

Or n est un entier, donc $2n+1$ est le double d'un entier augmenté de 1 : $2n+1$ est impair.

Donc, pour tout entier n , le nombre $(n+1)^2 - n^2$ est impair. ■

Contrôle : pour $n = 4$, $5^2 - 4^2 = 25 - 16 = 9$, impair ; pour $n = 10$, $11^2 - 10^2 = 121 - 100 = 21$, impair. ✓

Attention ! En a), la deuxième égalité de l'élève contient une seconde erreur : $-(2x^2 + x - 3) = -2x^2 - x + 3$, et non $-2x^2 - x - 3$. En b), chaque contre-exemple réfute « pour tout », mais une égalité peut rester vraie pour certaines valeurs : i), ii) et iv) le sont pour $x = 0$, iii) pour $x = 8$.

6. Sujets type Brevet

Cette banque prolonge le chapitre : les sujets 1 et 3 à 6 relèvent du parcours recommandé (🎯) ; les sujets 2 et 7 à 9 sont en perfectionnement (🏆).

À retenir. Chaque sujet de cette section porte sa copie modèle 📄 : cette rédaction contient les éléments d'une solution complète ; d'autres rédactions justifiées sont possibles. On nomme l'outil choisi (identité remarquable avec ses a et b , distributivité ou facteur commun), on écrit la ligne intermédiaire avant de réduire, on conclut par une phrase complète qui répond à la question posée, et on contrôle le résultat (valeur test, ordre de grandeur, chiffre des unités ou redéveloppement). Ce qui est écrit hors de l'encadré explique ou met en garde : cela ne se recopie pas.

6.1. Brevet 1 : Questions flash de type brevet 🎯

★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **D2** (question a)) ; **F3** (question b)) ; **L2** (question c)) ; **D1** (question c)).

📎 a) J'utilise $(a+b)(a-b) = a^2 - b^2$ avec $a = x$ et $b = 6$.

$$(x+6)(x-6) = x^2 - 6^2$$

$$= \boxed{x^2 - 36}$$

Contrôle ($x = 1$) : $7 \times (-5) = -35$ et $1 - 36 = -35$. ✓

J'utilise $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ avec $a = 2x$ et $b = 5$.

$$(2x-5)(2x+5) = (2x)^2 - 5^2$$

$$= \boxed{4x^2 - 25}$$

Contrôle ($x = 1$) : $(-3) \times 7 = -21$ et $4 - 25 = -21$. ✓

📎 b) Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. $x^2 = x^2$ et $256 = 16^2$, donc $a = x$ et $b = 16$.

$$x^2 - 256 = x^2 - 16^2$$

$$= \boxed{(x+16)(x-16)}$$

Contrôle : $(x+16)(x-16) = x^2 - 16^2 = x^2 - 256$. ✓

Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. $64x^2 = (8x)^2$ et $9 = 3^2$, donc $a = 8x$ et $b = 3$.

$$64x^2 - 9 = (8x)^2 - 3^2$$

$$= \boxed{(8x+3)(8x-3)}$$

Contrôle : $(8x+3)(8x-3) = (8x)^2 - 3^2 = 64x^2 - 9$. ✓

📎 c) L'opposé de $4x - 9$ s'écrit $-(4x - 9)$. Je change le signe de chacun de ses termes : $-(4x - 9) = \boxed{-4x + 9}$.

Contrôle : $(4x - 9) + (-4x + 9) = 0$. ✓

$$-(6 - x) + 2(x - 1) = -(6 - x) + 2 \times x + 2 \times (-1)$$

$$= -6 + x + 2x - 2$$

$$= \boxed{3x - 8}$$

je calcule chaque produit, et le signe $-$ change le signe de chaque terme de la parenthèse

je regroupe les termes semblables

Contrôle ($x = 1$) : $-5 + 2 \times 0 = -5$ et $3 - 8 = -5$. ✓

Attention ! Le signe $-$ devant $(6 - x)$ change le signe des deux termes de la parenthèse : $-(6 - x) = -6 + x$. Écrire $-6 - x$, c'est oublier de changer le signe de $-x$.

6.2. Brevet 2 : Programme de calcul 🏆

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **P1** (questions a) et b)) ; **D2** (question b)) ; **P2** (question c)).

📎 a) Avec 2 au départ : $2 + 3 = 5$; $5^2 = 25$; $25 - 2^2 = 25 - 4 = 21$. J'obtiens bien 21. ✓

📎 b) Avec x au départ :

J'ajoute 3 : $x + 3$.

J'élève le résultat au carré : $(x + 3)^2$.

Je soustrais le carré du nombre de départ : $(x + 3)^2 - x^2$.

Le résultat est $(x + 3)^2 - x^2$. J'utilise $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 3$:

$$(x + 3)^2 - x^2 = x^2 + 6x + 9 - x^2 \quad (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$= \boxed{6x + 9}$$

je regroupe les termes semblables

Contrôle : pour $x = 2$, $6 \times 2 + 9 = 21$, le résultat de la question a). ✓

📎 c) Je cherche x tel que $6x + 9 = 30$.

$$6x + 9 = 30$$

$$6x = 30 - 9 = 21 \quad \text{je soustrais 9 aux deux membres}$$

$$x = \frac{21}{6} = 3,5 \quad \text{je divise les deux membres par 6}$$

Conclusion : le nombre de départ qui donne 30 est $\boxed{x = 3,5}$, et c'est le seul possible, puisque $6x + 9 = 30$ impose $x = 3,5$.

Vérification : $3,5 + 3 = 6,5$; $6,5^2 = 42,25$; $42,25 - 3,5^2 = 42,25 - 12,25 = 30$. ✓

À retenir. Autre voie en b), par $a^2 - b^2$ avec les blocs $a = x + 3$ et $b = x$: $[(x + 3) + x][(x + 3) - x] = (2x + 3) \times 3 = 6x + 9$.

6.3. Brevet 3 : Développer et prouver une factorisation

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **D2** (question a)) ; **D1** (question a)) ; **J1** (question b)) ; **V1** (question c)).

a) Je développe chaque produit à part.

J'utilise $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 3$: $(x - 3)^2 = x^2 - 2 \times x \times 3 + 3^2 = x^2 - 6x + 9$.

$$(x - 3)(1 - 2x) = x \times 1 + x \times (-2x) + (-3) \times 1 + (-3) \times (-2x)$$

$$= x - 2x^2 - 3 + 6x$$

je calcule chaque produit

$$= -2x^2 + 7x - 3$$

je regroupe les termes semblables

$$E = (x - 3)^2 + (x - 3)(1 - 2x)$$

$$= (x^2 - 6x + 9) + (-2x^2 + 7x - 3) \quad \text{je remplace chaque produit par son développement}$$

$$= x^2 - 6x + 9 - 2x^2 + 7x - 3 \quad \text{je supprime les parenthèses précédées d'un signe +}$$

$$= \boxed{-x^2 + x + 6} \quad \text{je regroupe les termes semblables}$$

Contrôle $(x = 1)$: $(-2)^2 + (-2) \times (-1) = 6$ et $-1 + 1 + 6 = 6$. ✓

b) Je développe la forme proposée :

$$(x - 3)(-x - 2) = -x^2 - 2x + 3x + 6 \quad \text{double distributivité}$$

$$= -x^2 + x + 6 \quad \text{je regroupe les termes semblables}$$

Je retrouve la forme développée de E obtenue à la question a). Donc, pour tout nombre x , $E = (x - 3)(-x - 2)$. ■

c) Je choisis la forme factorisée, car pour $x = 3$ le facteur $x - 3$ vaut 0 : le produit est nul sans autre calcul. $E = (x - 3)(-x - 2)$. Pour $x = 3$:

$$E = (3 - 3) \times (-3 - 2)$$

$$= 0 \times (-5) = 0$$

Pour $x = 3$, $\boxed{E = 0}$.

À retenir. On peut aussi obtenir la forme factorisée directement, la parenthèse $(x - 3)$ étant commune aux deux termes : $E = (x - 3)[(x - 3) + (1 - 2x)] = (x - 3)(-x - 2)$. Pour prouver l'égalité, développer la forme proposée suffit.

6.4. Brevet 4 : Calcul astucieux justifié

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **C1** (questions a) et b)) ; **C2** (question c)).

a) J'utilise $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ avec $a = 100$ et $b = 4$, car $104 = 100 + 4$ et $96 = 100 - 4$.

$$104 \times 96 = (100 + 4)(100 - 4) = 100^2 - 4^2$$

$$= 10\,000 - 16 = \boxed{9\,984}$$

J'obtiens bien $104 \times 96 = 9\,984$. ✓

Contrôle : le chiffre des unités est celui de $4 \times 6 = 24$, soit 4, et 9 984 est un peu plus petit que $100^2 = 10\,000$. ✓

b) J'utilise $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = 1\,000$ et $b = 2$, car $1\,002 = 1\,000 + 2$.

$$1\,002^2 = (1\,000 + 2)^2 = 1\,000^2 + 2 \times 1\,000 \times 2 + 2^2$$

$$= 1\,000\,000 + 4\,000 + 4 = \boxed{1\,004\,004}$$

Contrôle : le chiffre des unités est celui de $2 \times 2 = 4$, et 1 004 004 est un peu plus grand que $1\,000^2 = 1\,000\,000$. ✓

c) J'utilise $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec $a = 57$ et $b = 43$.

$$57^2 - 43^2 = (57 + 43)(57 - 43)$$

$$= 100 \times 14 = \boxed{1\,400}$$

Contrôle : 57^2 se termine comme $7 \times 7 = 49$, par 9 ; 43^2 se termine comme $3 \times 3 = 9$, par 9 ; la différence se termine donc par 0, comme 1 400. ✓

6.5. Brevet 5 : Démonstration (parité)

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **J3** (question a)) ; **J2** (question b)) ; **T3** (question c)).

a) $7 + 9 = 16 = 4 \times 4$; $15 + 17 = 32 = 4 \times 8$.

Ces deux sommes sont des multiples de 4.

b) Soit n un entier quelconque. Deux nombres impairs consécutifs s'écrivent $2n + 1$ et $2n + 3$.

Je calcule leur somme :

$$(2n + 1) + (2n + 3) = 4n + 4 \quad \text{je regroupe les termes semblables}$$

$$= 4(n + 1) \quad \text{je mets 4 en facteur}$$

Or n est un entier, donc $n + 1$ est un entier : $4(n + 1)$ est un multiple de 4.

Donc, pour tout entier n , la somme de deux nombres impairs consécutifs est un multiple de 4. ■

☞ c) Pour les nombres impairs 1 et 5, la somme vaut $1 + 5 = 6$, et 6 n'est pas un multiple de 4 ($4 \times 1 = 4$ et $4 \times 2 = 8$) : l'affirmation « la somme de deux nombres impairs est un multiple de 4 » n'est pas vraie pour tous les nombres impairs. Non.

Attention ! Le contre-exemple de c) doit utiliser deux impairs qui ne sont pas consécutifs : avec 1 et 3, la somme 4 est un multiple de 4, comme le prouve la question b).

6.6. Brevet 6 : L'expression I

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **D2** (question a)) ; **D1** (question a)) ; **F3** (question b)) ; **V1** (questions c) et d)).

☞ a) Je développe le carré à part.

J'utilise $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ avec $a = 7x$ et $b = 3$: $(7x - 3)^2 = (7x)^2 - 2 \times 7x \times 3 + 3^2 = 49x^2 - 42x + 9$.

$$\begin{aligned} I &= (7x - 3)^2 - 25 \\ &= (49x^2 - 42x + 9) - 25 \quad \text{je remplace le carré par son développement} \\ &= \boxed{49x^2 - 42x - 16} \quad \text{je regroupe les termes semblables} \end{aligned}$$

Contrôle ($x = 1$) : $4^2 - 25 = -9$ et $49 - 42 - 16 = -9$. ✓

☞ b) Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. $(7x - 3)^2$ est le carré du bloc $7x - 3$ et $25 = 5^2$, donc $a = 7x - 3$ et $b = 5$.

$$\begin{aligned} (7x - 3)^2 - 25 &= (7x - 3)^2 - 5^2 \\ &= [(7x - 3) + 5][(7x - 3) - 5] \quad a^2 - b^2 = (a + b)(a - b) \\ &= \boxed{(7x + 2)(7x - 8)} \quad \text{je réduis chaque facteur} \end{aligned}$$

Contrôle : $(7x + 2)(7x - 8) = 49x^2 - 56x + 14x - 16 = 49x^2 - 42x - 16$ et $(7x - 3)^2 - 25 = 49x^2 - 42x - 16$ d'après la question a). ✓

☞ c) Forme de départ : $I = (7x - 3)^2 - 25$. Pour $x = 1$:

$$\begin{aligned} I &= (7 \times 1 - 3)^2 - 25 \\ &= 4^2 - 25 = 16 - 25 = -9 \end{aligned}$$

Pour $x = 1$, $I = -9$.

Forme développée : $I = 49x^2 - 42x - 16$. Pour $x = 1$:

$$\begin{aligned} I &= 49 \times 1^2 - 42 \times 1 - 16 \\ &= 49 - 42 - 16 = -9 \end{aligned}$$

Pour $x = 1$, $I = -9$.

Forme factorisée : $I = (7x + 2)(7x - 8)$. Pour $x = 1$:

$$\begin{aligned} I &= (7 \times 1 + 2) \times (7 \times 1 - 8) \\ &= 9 \times (-1) = -9 \end{aligned}$$

Pour $x = 1$, $I = -9$.

Les trois calculs sont justes et donnent -9 ; je choisirais la forme factorisée, ici la plus courte : un produit de deux nombres simples.

☞ d) Forme de départ : $I = (7x - 3)^2 - 25$. Pour $x = \frac{3}{7}$:

$$\begin{aligned} I &= \left(7 \times \frac{3}{7} - 3\right)^2 - 25 \\ &= (3 - 3)^2 - 25 = 0^2 - 25 = -25 \end{aligned}$$

Pour $x = \frac{3}{7}$, $I = -25$.

Forme factorisée : $I = (7x + 2)(7x - 8)$. Pour $x = \frac{3}{7}$:

$$\begin{aligned} I &= \left(7 \times \frac{3}{7} + 2\right) \times \left(7 \times \frac{3}{7} - 8\right) \\ &= (3 + 2) \times (3 - 8) = 5 \times (-5) = -25 \end{aligned}$$

Pour $x = \frac{3}{7}$, $I = -25$.

Les deux formes donnent -25 sans fraction, car $7 \times \frac{3}{7} = \frac{7 \times 3}{7} = 3$; la forme de départ est ici la plus courte : le bloc $7x - 3$ vaut 0.

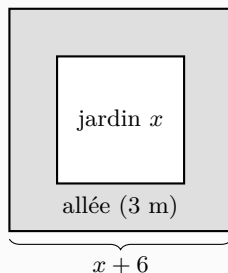
☞ Non : aucune écriture n'est toujours la meilleure ; en c), c'était la forme factorisée. Je choisis l'écriture selon la valeur de x et selon le but du calcul.

6.7. Brevet 7 : L'allée du jardin

★★★★

Méthode. Modèles associés : **T1** (questions a) et d)) ; **J1** (question b)) ; **V1** (question c)).

a) Schéma d'abord : deux carrés emboîtés ; l'allée de 3 m borde le jardin des deux côtés de chaque dimension, donc le grand carré a pour côté $x + 3 + 3 = x + 6$.



b) Je note $\mathcal{A}$ l'aire de l'allée, en m^2 : c'est l'aire du grand carré moins l'aire du jardin, donc $\mathcal{A} = (x + 6)^2 - x^2$. J'utilise $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ avec les blocs $a = x + 6$ et $b = x$.

$$\begin{aligned} (x + 6)^2 - x^2 &= [(x + 6) + x] [(x + 6) - x] & a^2 - b^2 &= (a + b)(a - b) \\ &= (2x + 6) \times 6 & & \text{je réduis chaque facteur} \\ &= 12x + 36 & & \text{distributivité simple} \\ &= 12(x + 3) & & \text{je mets 12 en facteur} \end{aligned}$$

Je retrouve $12(x + 3)$. Donc, pour tout $x > 0$, l'aire de l'allée vaut $12(x + 3) \text{ m}^2$. ■

c) Je choisis la forme factorisée, qui se calcule de tête. $\mathcal{A} = 12(x + 3)$. Pour $x = 17$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= 12 \times (17 + 3) \\ &= 12 \times 20 = 240 \end{aligned}$$

Pour $x = 17$, $\mathcal{A} = 240 \text{ m}^2$.

Conclusion : l'aire de l'allée est $12(x + 3) \text{ m}^2$, soit 240 m^2 pour un jardin de 17 m de côté.

d) Vérification : l'allée est un ruban de 3 m de large autour d'un carré de 17 m ; sa ligne médiane fait environ $4 \times 20 = 80 \text{ m}$ de tour, d'où une aire d'environ $3 \times 80 = 240$, soit 240 m^2 : le résultat de la question c) est vraisemblable. ✓

6.8. Brevet 8 : Le produit des deux voisins

★★★★

Méthode. Modèles associés : **J1** (question a)) ; **C1** (question b)).

a) Je développe le membre de gauche. J'utilise $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$ avec $a = n$ et $b = 1$.

$$\begin{aligned} (n - 1)(n + 1) + 1 &= n^2 - 1 + 1 & (a - b)(a + b) &= a^2 - b^2 \\ &= n^2 & & \text{je regroupe les termes semblables} \end{aligned}$$

Je retrouve le membre de droite. Donc, pour tout entier n , $(n - 1)(n + 1) + 1 = n^2$. ■

b) J'applique l'égalité du a) avec $n = 60$, $n = 80$ puis $n = 1\,000$:

$$59 \times 61 = 60^2 - 1 = 3\,600 - 1 = 3\,599 ; \quad 79 \times 81 = 80^2 - 1 = 6\,400 - 1 = 6\,399 ; \quad 999 \times 1\,001 = 1\,000^2 - 1 = 1\,000\,000 - 1 = 999\,999.$$

Contrôle : $9 \times 1 = 9$, chaque produit se termine par 9 ; et chacun est un peu plus petit que le carré du nombre du milieu. ✓

c) Conclusion : « le produit de deux entiers qui encadrent immédiatement l'entier n , c'est-à-dire $n - 1$ et $n + 1$, vaut $n^2 - 1$, le carré de n diminué de 1 ».

6.9. Brevet 9 : Somme des carrés de deux consécutifs

★★★★

Méthode. Modèles associés : J3 (question a)) ; J2 (question b)).

a) Pour $n = 0, n = 1, n = 2, n = 3$ et $n = 4$, la somme vaut : $0^2 + 1^2 = 1$; $1^2 + 2^2 = 5$; $2^2 + 3^2 = 13$; $3^2 + 4^2 = 25$; $4^2 + 5^2 = 41$. Ces cinq sommes sont impaires : il semble que la somme des carrés de deux entiers consécutifs soit toujours impaire. Ces exemples établissent seulement les cas testés : l'affirmation porte sur une infinité d'entiers, il faut donc une démonstration avec une lettre.

b) Soit n un entier quelconque. Deux entiers consécutifs s'écrivent n et $n + 1$. Je calcule la somme de leurs carrés. J'utilise $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = n$ et $b = 1$ pour développer $(n + 1)^2$:

$$\begin{aligned} n^2 + (n + 1)^2 &= n^2 + n^2 + 2n + 1 & (a + b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &= 2n^2 + 2n + 1 & & \text{je regroupe les termes semblables} \\ &= 2(n^2 + n) + 1 & & \text{je mets 2 en facteur dans } 2n^2 + 2n \end{aligned}$$

Or n est un entier, donc $k = n^2 + n$ est un entier : $2(n^2 + n) + 1 = 2k + 1$ est un nombre impair.

Vérification : pour $n = 4, 16 + 25 = 41 = 2 \times 20 + 1$, avec $k = 4^2 + 4 = 20$. ✓

Donc, pour tout entier $n, n^2 + (n + 1)^2$ est impair. ■

c) C'est la mise sous la forme $2(n^2 + n) + 1$ qui montre l'imparité : le « $2 \times$ entier » emporte la parité, le « $+1$ » la brise. Je peux aussi dire que $2n^2$ et $2n$ sont pairs : leur somme, augmentée de 1, est impaire. La factorisation rassemble cette justification dans une seule forme $2k + 1$.

7. Exercices contextualisés interdisciplinaires

7.1. Physique : L'énergie du freinage

★★★☆

Méthode. Modèle associé : V1 (questions a) et b)).

a) $E_c = \frac{1}{2} m v^2$. Pour $m = 1\,200$ et $v = 10$:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \times 1\,200 \times 10^2 \\ &= 600 \times 100 = 60\,000 \end{aligned}$$

Pour une voiture de $1\,200$ kg roulant à 10 m/s, $E_c = 60\,000$ J.

Contrôle : la moitié de $1\,200$ est 600 , et $10^2 = 100$; $600 \times 100 = 60\,000$. ✓

b) $E_c = \frac{1}{2} m v^2$. Pour $m = 1\,200$ et $v = 20$:

$$\begin{aligned} E_c &= \frac{1}{2} \times 1\,200 \times 20^2 \\ &= 600 \times 400 = 240\,000 \end{aligned}$$

À 20 m/s, $E_c = 240\,000$ J.

L'erreur de Karim : $(2v)^2 = 4v^2$, et non $2v^2$, car le carré porte sur tout le facteur.

Conclusion : quand la vitesse double, l'énergie cinétique est multipliée par $240\,000 \div 60\,000 = 4$, pas par 2.

c) Si v devient kv , la nouvelle énergie cinétique vaut :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m (kv)^2 &= \frac{1}{2} m k^2 v^2 & (kv)^2 &= k^2 v^2 : \text{le carré porte sur tout le facteur} \\ &= k^2 \times \frac{1}{2} m v^2 & & \text{la multiplication est commutative} \end{aligned}$$

L'énergie est multipliée par k^2 . Je retrouve l'encadré « Les erreurs classiques » du cours : écrire $(2x)^2 = 2x^2$ est une erreur, car le carré porte sur tout le facteur ; ici, $(kv)^2 = k^2 v^2$.

Vérification : pour $k = 2$, je retrouve le facteur 4 de la question b). ✓

7.2. Aménagement : Le terrain reconfiguré

★★★☆

Méthode. Modèles associés : T3 (question a)) ; D2 (question b)).

a) Pour $a = 20$: le carré a pour aire $20^2 = 400$, soit 400 m^2 , et le rectangle $25 \times 15 = 375$, soit 375 m^2 . Les aires ne sont pas égales : le maire a déjà tort sur cet exemple, et l'écart vaut $400 - 375 = 25 \text{ m}^2$.

b) J'utilise $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$ avec $A = a$, le côté du carré, et $B = 5$.

$$\begin{aligned} (a + 5)(a - 5) &= a^2 - 5^2 \\ &= a^2 - 25 \end{aligned}$$

Contrôle ($a = 20$) : $400 - 25 = 375$, l'aire trouvée en a). ✓

L'aire du rectangle est $a^2 - 25$. Quelle que soit la valeur de a , le rectangle a exactement 25 m^2 de moins que le carré a^2 .

 c) Conclusion : « la perte est toujours de 25 m², que le terrain fasse 20 m ou 2 km de côté ; elle ne dépend pas de la taille du terrain, seulement du décalage de 5 m ».

7.3. Programmation : Le testeur d'identités

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **J3** (questions b) et c)) ; **J1** (question c)).

 a) Pour chaque x de -5 à 5 , le script affiche x , la valeur de $(x+5)^2 - x^2$ et celle de $10x + 25$: $x = -5$: -5 -25 -25 ; $x = 0$: 0 25 25 ; $x = 2$: 2 45 45.

 b) Il semble que, pour tout nombre x , $(x+5)^2 - x^2 = 10x + 25$.

 c) Non : onze valeurs testées ne prouvent rien pour les autres.

Je développe le membre de gauche. J'utilise $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ avec $a = x$ et $b = 5$.

$$\begin{aligned} (x+5)^2 - x^2 &= x^2 + 10x + 25 - x^2 & (a+b)^2 &= a^2 + 2ab + b^2 \\ &= \boxed{10x + 25} & & \text{je regroupe les termes semblables} \end{aligned}$$

Je retrouve le membre de droite. Donc, pour tout nombre x , $(x+5)^2 - x^2 = 10x + 25$. ■

 d) Dans la boucle, je remplace la ligne d'affichage par : `print(x, (x+5)**2, x**2+25)`. Seul $x = 0$ affiche deux nombres égaux (25 et 25), car le double produit $10x$ s'annule uniquement en 0.

À retenir. Autre voie en c), par $a^2 - b^2 : (x+5)^2 - x^2 = (2x+5) \times 5 = 10x + 25$.

7.4. Histoire du calcul : La machine de Horner

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **V1** (questions a) et d)) ; **J1** (question b)).

 a) Machine, pour $x = 2$:

$$2 \xrightarrow{\times 2} 4 \xrightarrow{+5} 9 \xrightarrow{\times 2} 18 \xrightarrow{-7} 11 \xrightarrow{\times 2} 22 \xrightarrow{+8} \boxed{30}.$$

Voie naïve : $B = 2x^3 + 5x^2 - 7x + 8$. Pour $x = 2$:

$$\begin{aligned} B &= 2 \times 2^3 + 5 \times 2^2 - 7 \times 2 + 8 \\ &= 16 + 20 - 14 + 8 = 30 \end{aligned}$$

Pour $x = 2$, $B = 30$. Les deux voies coïncident.

 b) Je développe le membre de gauche, pour tout nombre x .

$$\begin{aligned} ((2x+5)x-7)x+8 &= (2x^2+5x-7)x+8 & \text{distributivité simple} \\ &= 2x^3+5x^2-7x+8 & \text{distributivité simple} \end{aligned}$$

Je retrouve le membre de droite. Donc, pour tout nombre x , $((2x+5)x-7)x+8 = 2x^3+5x^2-7x+8$. ■ La machine calcule donc exactement B , quelle que soit la valeur de x : c'est une identité.

 c) Voie naïve : $2 \times x \times x \times x$ (trois multiplications), $5 \times x \times x$ (deux), $7 \times x$ (une) : 6 multiplications en tout. Machine : $\times 2$, $\times x$, $\times x$: 3 multiplications, moitié moins, sans rien perdre (c'est l'identité du b) qui le garantit).

 d) $C = 3x^2 - 4x + 3 = (3x-4)x + 3$ (je mets x en facteur dans $3x^2 - 4x$). $C = (3x-4)x + 3$. Pour $x = 10$:

$$\begin{aligned} C &= (3 \times 10 - 4) \times 10 + 3 \\ &= (30 - 4) \times 10 + 3 = 260 + 3 = 263 \end{aligned}$$

Pour $x = 10$, $C = 263$, de tête : la forme emboîtée est aussi une forme de calcul malin.

8. Pour aller plus loin

8.1. Défi : Un carré presque premier

★★★★☆

Méthode. Modèle associé : **F3**.

 Je factorise. Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. $n^2 = n^2$ et $9 = 3^2$, donc $a = n$ et $b = 3$.

$$\begin{aligned} n^2 - 9 &= n^2 - 3^2 \\ &= (n-3)(n+3) & a^2 - b^2 &= (a-b)(a+b) \end{aligned}$$

Contrôle : $(n-3)(n+3) = n^2 - 3^2 = n^2 - 9$. ✓

Pour $n \leq 3$, $n^2 - 9 \leq 0$ n'est pas premier. Pour $n \geq 4$, les deux facteurs sont des entiers strictement positifs ; si leur produit est premier, l'un d'eux doit valoir 1 (sinon il admet un diviseur autre que 1 et lui-même). Comme $n+3 \geq 3$, la seule possibilité est $n-3 = 1$, c'est-à-dire $n = 4$. Réciproquement, pour $n = 4$, $n^2 - 9 = 16 - 9 = 7$, qui est premier.

Conclusion : $n = 4$ est l'unique solution.

8.2. Preuve sans mots : La somme des impairs

★★★★

Méthode. Modèle associé : **J1** (question c)).

 a) $1 + 3 + 5 + 7 + 9 = \boxed{25} = 5^2$; $1 + 3 + \dots + 19 = \boxed{100} = 10^2$.

 b) Pour tout entier $n \geq 1$, la somme des n premiers entiers impairs positifs vaut n^2 . Chaque équerre en L ajoute la couche suivante : un carré $n \times n$ est exactement formé de n équerres accolées, d'aires $1, 3, 5, \dots, 2n - 1$.

 c) L'aire de la n -ième équerre est ce que j'ajoute pour passer du carré $(n-1)^2$ au carré n^2 . J'utilise $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ avec $a = n$ et $b = n-1$.

$$\begin{aligned} n^2 - (n-1)^2 &= [n + (n-1)] [n - (n-1)] & a^2 - b^2 &= (a+b)(a-b) \\ &= (2n-1) \times 1 & \text{je réduis chaque facteur} \\ &= 2n-1 \end{aligned}$$

C'est bien le n -ième nombre impair.

Donc, en empilant les équerres de 1 à n , je remplis le carré : pour tout entier $n \geq 1$, $\boxed{1 + 3 + \dots + (2n-1) = n^2}$. ■

8.3. Prép. 2^{de} : L'expression conjuguée

★★★★

Méthode. Modèle associé : **D2** (question a)).

 a) J'utilise $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$ avec $a = 4$ et $b = \sqrt{7}$.

$$\begin{aligned} (4 - \sqrt{7})(4 + \sqrt{7}) &= 4^2 - (\sqrt{7})^2 \\ &= 16 - 7 = \boxed{9} \quad (\sqrt{7})^2 = 7 \end{aligned}$$

 b) Le produit calculé en a) vaut $9 \neq 0$, donc ses deux facteurs $4 - \sqrt{7}$ et $4 + \sqrt{7}$ sont non nuls. La fraction est définie, et je peux multiplier son numérateur et son dénominateur par $4 + \sqrt{7}$:

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{4 - \sqrt{7}} \\ &= \frac{1 \times (4 + \sqrt{7})}{(4 - \sqrt{7})(4 + \sqrt{7})} \quad \text{je multiplie le numérateur et le dénominateur par } 4 + \sqrt{7} \\ &= \boxed{\frac{4 + \sqrt{7}}{9}} \quad \text{question a)} \end{aligned}$$

Contrôle : $4 - \sqrt{7} \approx 1,35$, donc $B \approx 0,74$; et $\frac{4+2,65}{9} \approx 0,74$. ✓

 c) C'est $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$ qui « fait tout marcher » : elle transforme le dénominateur en $4^2 - (\sqrt{7})^2 = 16 - 7$, un entier, car $(\sqrt{7})^2 = 7$. Même idée que $102 \times 98 = (100+2)(100-2)$: j'encadre un nombre gênant par « somme $\times$ différence » pour faire disparaître ce qui dérange.

8.4. Le carré parfait caché

★★★★

Méthode. Modèles associés : **D1** (question a)) ; **J1** (question b)).

 a)

$$\begin{aligned} a &= n(n+3) = n \times n + n \times 3 \\ &= n^2 + 3n & \text{je calcule chaque produit} \\ (n+1)(n+2) &= n \times n + n \times 2 + 1 \times n + 1 \times 2 \\ &= n^2 + 2n + n + 2 & \text{je calcule chaque produit} \\ &= n^2 + 3n + 2 & \text{je regroupe les termes semblables} \end{aligned}$$

Contrôle ($n=1$) : $1 \times 4 = 4$ et $1 + 3 = 4$; $2 \times 3 = 6$ et $1 + 3 + 2 = 6$. ✓

Donc $(n+1)(n+2) = (n^2 + 3n) + 2 = \boxed{a+2}$.

 b) Je regroupe le premier facteur avec le dernier, et les deux facteurs centraux.

$$\begin{aligned} n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 &= \underbrace{[n(n+3)]}_{=a} \times \underbrace{[(n+1)(n+2)]}_{=a+2} + 1 \quad \text{la multiplication est commutative} \\ &= a(a+2) + 1 & \text{question a)} \\ &= a^2 + 2a + 1 & \text{distributivité simple} \\ &= \boxed{(a+1)^2} & A^2 + 2AB + B^2 = (A+B)^2 \text{ avec } A=a \text{ et } B=1 \end{aligned}$$

Je retrouve $(a+1)^2$. Donc, pour tout entier naturel n , $n(n+1)(n+2)(n+3) + 1 = a(a+2) + 1 = (a+1)^2$. ■

🔗 c) Le produit de quatre entiers consécutifs, augmenté de 1, est toujours un carré parfait : c'est le carré de $a + 1 = \boxed{n^2 + 3n + 1}$.
Contrôle pour $n = 3$: $3 \times 4 \times 5 \times 6 + 1 = 360 + 1 = 361$, et $n^2 + 3n + 1 = 9 + 9 + 1 = 19$; or $19^2 = 361$. ✓

8.5. Facteurs premiers géants (écho du 8.1) 🏰

★★★★

Méthode. Modèles associés : **C2** (questions a) et b)) ; **F3** (question b)) ; **J1** (question c)).

🔗 a) J'utilise $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ avec $a = 5\,000$ et $b = 1$.

$$\begin{aligned} A &= 24\,999\,999 = 25\,000\,000 - 1 = 5\,000^2 - 1^2 \\ &= (5\,000 - 1)(5\,000 + 1) & a^2 - b^2 &= (a - b)(a + b) \\ &= 4\,999 \times 5\,001 \end{aligned}$$

Contrôle : $4\,999 \times 5\,001$ se termine comme $9 \times 1 = 9$, par 9, comme 24 999 999. ✓
 Or $5\,001 = 3 \times 1\,667$ (somme des chiffres $5 + 0 + 0 + 1 = 6$, multiple de 3). D'où

$$\boxed{A = 3 \times 1\,667 \times 4\,999}$$

(1 667 et 4 999 premiers, admis).

🔗 b) $10^6 + 18 \times 10^3 + 81 = 1\,000\,000 + 18\,000 + 81 = 1\,018\,081 = B$. ✓

Trois termes, et les deux extrêmes sont des carrés : c'est peut-être un carré parfait. $10^6 = (10^3)^2$ et $81 = 9^2$, donc $a = 10^3$ et $b = 9$; le double produit vaut $2 \times 10^3 \times 9 = 18\,000$: c'est bien le terme central, précédé du signe +.

$$\begin{aligned} B &= (10^3)^2 + 2 \times 10^3 \times 9 + 9^2 \\ &= (10^3 + 9)^2 = 1\,009^2 & a^2 + 2ab + b^2 &= (a + b)^2 \end{aligned}$$

Contrôle : $(10^3 + 9)^2 = (10^3)^2 + 2 \times 10^3 \times 9 + 9^2 = 10^6 + 18 \times 10^3 + 81$. ✓

Donc $\boxed{B = 1\,009^2}$ (1 009 premier, admis) : la décomposition de B est $1\,009 \times 1\,009$.

🔗 c) Je développe le membre de droite.

$$\begin{aligned} (n - 2)(n^2 + 2n + 4) &= n^3 + 2n^2 + 4n - 2n^2 - 4n - 8 && \text{double distributivité} \\ &= n^3 - 8 && \text{je regroupe les termes semblables} \end{aligned}$$

Je retrouve le membre de gauche. Donc, pour tout entier n , $n^3 - 8 = (n - 2)(n^2 + 2n + 4)$. ■

Pour $n \leq 2$, $n^3 - 8 \leq 0$ n'est pas premier. Pour $n \geq 3$, les deux facteurs sont des entiers strictement positifs : si leur produit est premier, l'un doit valoir 1 (même argument qu'au 8.1). Or $n^2 + 2n + 4 = (n + 1)^2 + 3 \geq 3$: ce facteur ne vaut jamais 1. Reste $n - 2 = 1$, c'est-à-dire $n = 3$. Réciproquement, pour $n = 3$, $n^3 - 8 = 27 - 8 = 19$, qui est premier.

Conclusion : $\boxed{n = 3}$ est l'unique solution, et $n^3 - 8 = 19$.

8.6. La machine à triplets pythagoriciens 🏰

★★★★

Méthode. Modèle associé : **J1** (question c)).

🔗 a) $(u, v) = (1, 2)$: $a = 2^2 - 1^2 = 3$, $b = 2 \times 1 \times 2 = 4$, $c = 2^2 + 1^2 = 5 \rightarrow (3, 4, 5)$.
 $(2, 3)$: $a = 9 - 4 = 5$, $b = 12$, $c = 13 \rightarrow (5, 12, 13)$. $(3, 4)$: $a = 16 - 9 = 7$, $b = 24$, $c = 25 \rightarrow (7, 24, 25)$.
 $(2, 5)$: $a = 25 - 4 = 21$, $b = 20$, $c = 29 \rightarrow (21, 20, 29)$.

🔗 b) $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$. ✓

🔗 c) Je développe chaque expression.

$$\begin{aligned} (v^2 - u^2)^2 + (2uv)^2 &= (v^4 - 2u^2v^2 + u^4) + 4u^2v^2 && (A - B)^2 = A^2 - 2AB + B^2 \text{ et } (2uv)^2 = 4u^2v^2 \\ &= v^4 + 2u^2v^2 + u^4 && \text{je regroupe les termes semblables} \\ (v^2 + u^2)^2 &= v^4 + 2u^2v^2 + u^4 && (A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \end{aligned}$$

Les deux expressions sont égales à $v^4 + 2u^2v^2 + u^4$. Comme u et v sont entiers avec $0 < u < v$, a , b et c sont des entiers strictement positifs. Donc, pour tous entiers u et v tels que $0 < u < v$, $\boxed{a^2 + b^2 = c^2}$: (a, b, c) est un triplet pythagoricien. ■

🔗 d) Par exemple $(u, v) = (4, 7)$: $a = 49 - 16 = 33$, $b = 56$, $c = 49 + 16 = 65$; et $33^2 + 56^2 = 1\,089 + 3\,136 = 4\,225 = 65^2$. ✓

À retenir. Les trois identités du chapitre ne servent pas qu'à calculer vite : ici, un seul développement fabrique une infinité de triangles rectangles à côtés entiers.

9. Le pont vers le chapitre 02

9.1. Factoriser... puis résoudre ?

★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **V1** (questions a) et c)) ; **F3** (question b)).

 a) Le membre de gauche de l'équation est $x^2 - 9$. Pour $x = 3$:

$$\begin{aligned}x^2 - 9 &= 3^2 - 9 \\&= 9 - 9 = 0\end{aligned}$$

Pour $x = 3$, $x^2 - 9 = 0$: le nombre 3 convient.

Ce n'est pas forcément le seul : deux nombres opposés ont le même carré, et rien ne prouve encore qu'aucun autre nombre ne convient.

 b) Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. $x^2 = x^2$ et $9 = 3^2$, donc $a = x$ et $b = 3$.

$$\begin{aligned}x^2 - 9 &= x^2 - 3^2 \\&= \boxed{(x+3)(x-3)} \quad a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)\end{aligned}$$

Contrôle : $(x+3)(x-3) = x^2 - 3^2 = x^2 - 9$. ✓

 c) Je cherche un nombre qui annule le facteur $x+3$: $-3+3=0$, et le produit $(x+3)(x-3)$ vaut alors $0 \times (-6) = 0$. Je choisis donc -3 . Le membre de gauche de l'équation est $x^2 - 9$. Pour $x = -3$:

$$\begin{aligned}x^2 - 9 &= (-3)^2 - 9 \\&= 9 - 9 = 0\end{aligned}$$

Pour $x = -3$, $x^2 - 9 = 0$: le nombre -3 convient.

 d) Ce qui est vérifié : 3 et -3 sont solutions de $x^2 - 9 = 0$, par le calcul des questions a) et c).

Ce qui est conjecturé : il semble que, si un produit de deux nombres vaut 0, l'un au moins de ces deux nombres soit nul. Avec $(x+3)(x-3) = 0$, j'obtiendrais alors $x+3=0$ ou $x-3=0$, donc $x=-3$ ou $x=3$: il n'existerait aucune troisième solution.

Ce qui reste à démontrer : cette propriété des produits nuls. Elle n'est pas encore établie dans ce chapitre : la factorisation ne suffit donc pas encore à prouver qu'il n'existe aucune troisième solution. La propriété sera démontrée au chapitre 02.

9.2. Ninon contre Grégory

★★★★

Méthode. Modèles associés : **F3** (question a)) ; **V1** (question b)).

 a) Méthode de Ninon : $x-1=3$ donne $x=4$; $x-1=-3$ donne $x=-2$.

Méthode de Grégory : $(x-1)^2 - 9 = 0$; je factorise le membre de gauche. Deux termes séparés par un signe $-$, et ce sont des carrés : c'est une différence de deux carrés. $(x-1)^2$ est le carré du bloc $x-1$ et $9=3^2$, donc $a=x-1$ et $b=3$.

$$\begin{aligned}(x-1)^2 - 9 &= (x-1)^2 - 3^2 \\&= \boxed{(x-1-3)(x-1+3)} \quad a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) \\&= (x-4)(x+2) \quad \text{je réduis chaque facteur}\end{aligned}$$

Contrôle : $(x-4)(x+2) = x^2 + 2x - 4x - 8 = x^2 - 2x - 8$ et $(x-1)^2 - 9 = x^2 - 2x + 1 - 9 = x^2 - 2x - 8$. ✓

D'où $(x-4)(x+2) = 0$: chacune des valeurs 4 et -2 annule un facteur. Les deux écritures font apparaître les mêmes valeurs 4 et -2 .

 b) Le membre de gauche de l'équation est $(x-1)^2$. Pour $x=4$:

$$\begin{aligned}(x-1)^2 &= (4-1)^2 \\&= 3^2 = 9\end{aligned}$$

Pour $x=4$, $(x-1)^2 = 9$: le nombre 4 convient.

Le membre de gauche de l'équation est $(x-1)^2$. Pour $x=-2$:

$$\begin{aligned}(x-1)^2 &= (-2-1)^2 \\&= (-3)^2 = 9\end{aligned}$$

Pour $x=-2$, $(x-1)^2 = 9$: le nombre -2 convient.

La factorisation ne suffit pas encore à prouver qu'il n'existe aucune autre solution : il manque la propriété du produit nul. La méthode de Ninon ne le prouve pas non plus : elle admet que 3 et -3 sont les seuls nombres dont le carré vaut 9, ce qui est justement la question laissée ouverte en 9.1.

 c) Grégory réutilise la factorisation du chapitre (différence de deux carrés « emboîtée », comme en 3.4). Pour exploiter rigoureusement $(x-4)(x+2) = 0$ et conclure qu'un des facteurs est nul, il manque encore la propriété du produit nul : elle sera énoncée et démontrée au chapitre 02.

Fin du corrigé. Les encadrés 📖 proposent des rédactions justifiées. Les exercices 🏰 restent facultatifs.