



Feuille d'exercices

Triangles semblables : Agrandissements et réductions

Difficulté : ★☆☆ très facile ★★☆☆ facile ★★★☆ moyen ★★★★ difficile

Parcours :  minimum  recommandé  perfectionnement

Les blocs « Enrichissement facultatif » placés après 1.2, 2.5, 4.4, 6.8, 7.7 et 7.8 se traitent après l'exercice initial, pour approfondir.

Cadre commun. Deux triangles sont semblables lorsque les longueurs de leurs côtés sont proportionnelles ; le coefficient k est le rapport de similitude. Les côtés qui se correspondent sont homologues.

Caractérisation angulaire. Deux triangles sont semblables si, et seulement si, leurs angles sont deux à deux de même mesure, et deux paires d'angles de même mesure suffisent (le troisième vaut 180° moins les deux autres).

Où trouver des angles de même mesure ? Donnée codée de l'énoncé • angle commun • angles opposés par le sommet • angles alternes-internes ou correspondants formés avec des droites parallèles • calcul du troisième angle.

Agrandissement-réduction de rapport k : les longueurs et les périmètres sont multipliés par k , les angles conservent leur mesure, les aires sont multipliées par k^2 , les volumes par k^3 . Une échelle $\frac{1}{n}$ est une réduction de rapport $k = \frac{1}{n}$.

Sens inverse : si l'énoncé donne les aires, leur rapport vaut k^2 ; on retrouve k en cherchant le nombre positif dont le carré vaut ce rapport.

Les pièges classiques :

- Ne pas confondre « semblables » et « égaux » : deux triangles semblables ont la même forme, pas forcément la même taille (deux triangles égaux sont semblables avec $k = 1$).
- Le rapport se lit entre côtés homologues (appariés par les angles de même mesure), jamais entre côtés pris au hasard.
- Les aires sont multipliées par k^2 , jamais par k ; les volumes par k^3 .
- Un seul angle de même mesure ne suffit pas ; il faut deux paires d'angles de même mesure.
- Attention au sens de k : on multiplie par k dans le sens qui a servi à le calculer, on divise par k dans l'autre ; vérifier la cohérence du résultat (le petit triangle doit avoir les petits côtés).

Méthode de base, les trois gestes :

1. Apparié : identifier les sommets homologues par les angles de même mesure (face à des angles de même mesure, les côtés homologues).
2. Poser : tableau de proportionnalité des côtés homologues, un triangle par ligne.
3. Résoudre : calculer k sur une colonne complète, puis multiplier ou diviser par k (ou produit en croix). Vérifier : les trois rapports sont-ils égaux ? le plus grand côté face au plus grand angle ?

Fluence (sans calculatrice).

- | | |
|--|---|
| a) Deux angles d'un triangle : 47° et 86° . Le troisième ? | g) Simplifier $\frac{3}{4,5}$. |
| b) Deux angles d'un triangle : 90° et 26° . Le troisième ? | h) Réduction de rapport 0,5 : une longueur de 7 cm devient... |
| c) Angles 40° et 60° ici, 60° et 80° là : semblables ? | i) $k = 1,2$ et périmètre 15 cm : nouveau périmètre ? |
| d) Agrandissement de rapport 3 : l'aire est multipliée par... | j) Échelle $\frac{1}{100}$: 3 cm sur le plan représentent... |
| e) Agrandissement de rapport 2 : le volume est multiplié par... | |
| f) L'aire a été multipliée par 25 : combien vaut k ? | |

Réactivation (chapitres précédents : 5 questions).

1. (Ch. 00) Décomposer 360 en produit de facteurs premiers.
2. (Ch. 01) Rendre irréductible $\frac{54}{36}$.
3. (Ch. 01) Calculer $\frac{3}{5} \times \frac{10}{9}$.
4. (Ch. 01) Calculer $(0,5)^3$ et $\left(\frac{2}{3}\right)^2$.
5. (Ch. 01) Écrire $1,25 \times 10^4$ en écriture décimale.

1. Reconnaître des triangles semblables

1.1. Semblables ou pas ? (par les angles)

☆☆☆☆

Dans cette série, on compare un triangle ABC et un triangle DEF .

Dans chaque cas, dire si ces deux triangles sont semblables. Justifier en calculant le troisième angle quand c'est nécessaire.

- a) Dans ABC , $\widehat{A} = 47^\circ$ et $\widehat{B} = 86^\circ$. Dans DEF , $\widehat{D} = 47^\circ$ et $\widehat{E} = 47^\circ$.
- b) Dans ABC , $\widehat{A} = 35^\circ$ et $\widehat{B} = 72^\circ$. Dans DEF , $\widehat{D} = 73^\circ$ et $\widehat{E} = 35^\circ$.
- c) Dans ABC , $\widehat{A} = 50^\circ$ et $\widehat{B} = 60^\circ$. Dans DEF , $\widehat{D} = 60^\circ$ et $\widehat{E} = 65^\circ$.
- d) ABC est rectangle en A avec $\widehat{B} = 32^\circ$. DEF est rectangle en D avec $\widehat{E} = 58^\circ$.
- e) Dans ABC , $\widehat{A} = 44^\circ$ et $\widehat{B} = 68^\circ$. DEF est isocèle en D avec $\widehat{D} = 92^\circ$.
- f) ABC est équilatéral. Dans DEF , $\widehat{D} = 60^\circ$ et $\widehat{E} = 60^\circ$.

1.2. Semblables ou pas ? (par les côtés)

☆☆☆☆

- a) Dans chaque cas, les triangles ABC et DEF sont-ils semblables ? Justifier par les trois rapports.
 - ABC ($AB = 3$; $BC = 4$; $AC = 5$) et DEF ($DE = 6$; $EF = 8$; $DF = 10$).
 - ABC ($AB = 3$; $BC = 4$; $AC = 5$) et DEF ($DE = 4$; $EF = 5$; $DF = 6$).
 - ABC ($AB = 4,5$; $BC = 6$; $AC = 7,5$) et DEF ($DE = 3$; $EF = 4$; $DF = 5$).
- b) Porter un regard critique. ABC et EFG sont deux triangles tels que : $AB = 5$ cm, $AC = 8$ cm et $BC = 6,5$ cm ; $EF = 1$ cm, $EG = 1,6$ cm et $FG = 1,2$ cm.
 - Le triangle EFG est-il une réduction du triangle ABC ?
 - Si non, modifier une longueur pour qu'il en soit ainsi. Indiquer alors le coefficient de réduction.

1.2. Enrichissement facultatif

Ajouter la même longueur conserve-t-il la forme ?

Dans l'exercice initial, les triangles de côtés (3;4;5) et (4;5;6) ne sont pas semblables. Pourtant, on a ajouté 1 à chaque longueur. Est-ce toujours un échec ? On cherche exactement quels triangles gardent leur forme lorsqu'on ajoute une même longueur positive aux trois côtés. Toutes les mesures sont exprimées en centimètres.

Notions utiles avant de commencer

Ajouter t à une longueur a donne $a + t$. Multiplier cette longueur par k donne ka . Pour passer de 4 à 6, on ajoute 2, mais on multiplie par $6/4 = 1,5$. Le coefficient est un quotient ; l'augmentation est une différence.

Avec les côtés seuls, on range les deux listes du plus petit au plus grand avant de comparer leurs quotients. Une même addition conserve cet ordre. Trois longueurs $0 < a \leq b \leq c$ forment un triangle non aplati exactement lorsque $a + b > c$.

On utilisera la distributivité $u(v + w) = uv + uw$, par exemple $3(4 + 2) = 12 + 6$. Dans une égalité, on peut soustraire le même nombre aux deux membres et les diviser par un même nombre non nul. Une condition exacte exige de montrer qu'elle est imposée par toute solution, puis qu'elle suffit réellement.

A. Faire apparaître une conjecture

A1) Ajouter 1 à chaque côté, puis compléter les trois quotients « nouveau côté / ancien côté ».

Côtés initiaux	Nouveaux côtés	Quotient 1	Quotient 2	Quotient 3
(3; 4; 5)				
(5; 5; 8)				
(4; 4; 4)				

A2) Vérifier que les trois nouvelles listes définissent bien des triangles. Lesquels sont semblables à leur triangle de départ ? Justifier avec les valeurs exactes des quotients.

A3) Quelle particularité du triangle initial semble permettre de conserver la forme ? Formuler une conjecture. Pourquoi les trois essais ne suffisent-ils pas à la prouver ?

B. Démontrer une condition nécessaire et suffisante

On part d'un triangle de côtés $0 < a \leq b \leq c$ et on fixe un nombre $t > 0$. Les nouveaux côtés sont $a + t, b + t, c + t$.

- B1) Montrer que ces longueurs sont positives, rangées dans le même ordre et forment toujours un triangle non aplati. Utiliser $a + b > c$ pour comparer $(a + t) + (b + t)$ et $c + t$.
- B2) Supposer que les triangles sont semblables. On a alors $(a + t)/a = (b + t)/b$. Faire le produit en croix, développer, soustraire ab , puis diviser par t . Qu'obtient-on entre a et b ? Reprendre avec a et c . Quelle nature du triangle est donc nécessaire ?
- B3) Réciproquement, si le triangle possède cette nature, vérifier l'égalité des trois quotients pour tout $t > 0$. Donner le rapport de similitude du triangle de départ vers le nouveau triangle et conclure avec une phrase « si et seulement si ».

C. Changer l'hypothèse

- C1) Si $t = 0$, quels triangles conviennent ? Quelle étape de B2 est alors interdite ? Pourquoi fallait-il préciser $t > 0$?
- C2) On retire maintenant 2 à chacun des côtés du triangle (3; 4; 5). Les trois résultats sont positifs : suffit-il de vérifier cela pour obtenir un triangle ? Comparer cette situation avec B1 et expliquer pourquoi une même règle d'addition ne se transpose pas automatiquement à une soustraction.

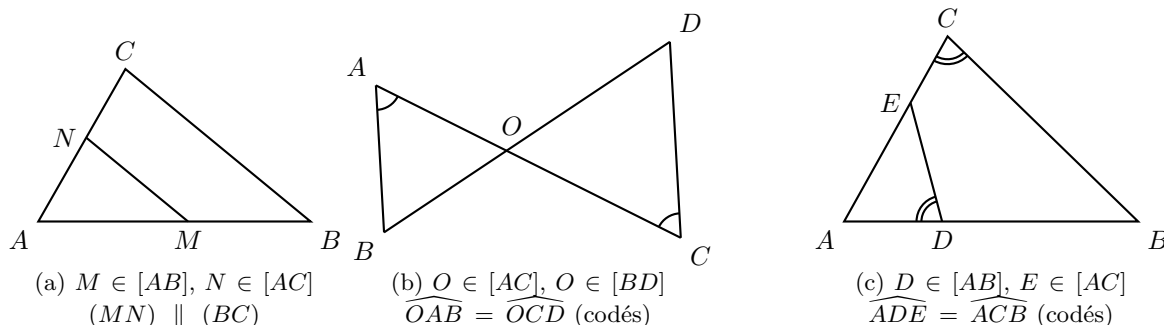
À retenir

Un agrandissement impose un même coefficient multiplicateur. Une même augmentation additive n'a pas le même effet relatif sur un petit et sur un grand côté. Pour une transformation proposée, il faut vérifier la proportionnalité et l'existence des triangles.

1.3. Justifier la similitude : trois configurations

★★☆☆

Pour chaque figure, démontrer que les deux triangles indiqués sont semblables, en utilisant la rédaction-type du cours (deux paires d'angles égaux, chacune justifiée).

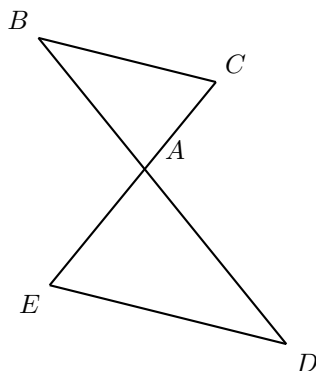


- a) Figure (a) : démontrer que les triangles AMN et ABC sont semblables.
- b) Figure (b) : démontrer que les triangles OAB et OCD sont semblables.
- c) Figure (c) : démontrer que les triangles ADE et ACB sont semblables, puis préciser les trois paires de sommets homologues. Attention : ici, E correspond à C ... ou à B ? Se laisser guider par les angles, pas par la position.

1.4. La configuration du papillon

★★★☆☆

Les segments $[BD]$ et $[CE]$ se coupent en leur intérieur en A , et les droites (BC) et (DE) sont parallèles. On donne $AB = 3,6$ cm et $AD = 4,8$ cm.



- a) Que peut-on dire du triangle ADE par rapport au triangle ABC ? Justifier par les angles (aucun théorème de Thalès ici !), et préciser le rapport de ABC vers ADE .

- b) Déterminer AE sachant que $AC = 2,4$ cm.
 c) Déterminer BC sachant que $DE = 5,2$ cm.

1.5. Vrai ou faux ? ☹

★★★☆☆

Pour chaque affirmation : vrai ou faux ? Un « vrai » se démontre (avec les angles) ; un « faux » se réfute par un contre-exemple chiffré.

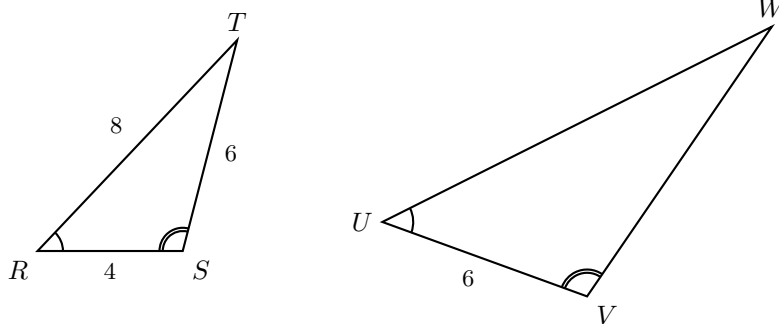
- a) Deux triangles équilatéraux sont toujours semblables.
 b) Deux triangles isocèles sont toujours semblables.
 c) Deux triangles rectangles sont toujours semblables.
 d) Deux triangles rectangles isocèles sont toujours semblables.
 e) Deux triangles isocèles ayant chacun un angle de 80° sont toujours semblables.
 f) Deux triangles semblables sont toujours égaux.
 g) Deux triangles égaux sont toujours semblables.

2. Calculer des longueurs

2.1. Premier calcul, deux façons ☹

★★★☆☆

Les triangles RST et UVW sont semblables, avec la correspondance $R \leftrightarrow U$, $S \leftrightarrow V$, $T \leftrightarrow W$ (angles codés sur la figure). On donne : $RS = 4$; $ST = 6$; $RT = 8$; $UV = 6$.



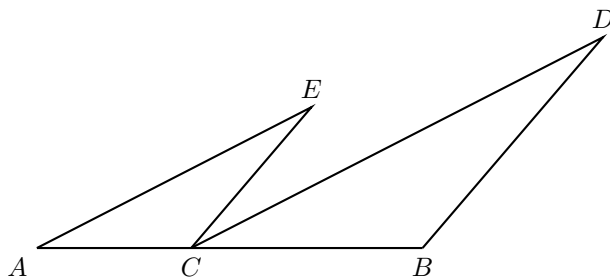
- a) Donner le rapport de similitude k de RST vers UVW .
 b) Calculer VW de deux façons : par le coefficient k , puis par un produit en croix. Laquelle des deux est la plus rapide ici, et pourquoi ?
 c) Calculer UW .
 d) Calculer le périmètre de chaque triangle. Que remarque-t-on ? Était-ce prévisible ?

2.2. L'exercice du Brevet ☹

★★★☆☆

C'est l'exercice type du chapitre : à savoir refaire les yeux fermés.

Sur la figure ci-dessous : le point C appartient au segment $[AB]$; $AC = 3$; $AB = 7,5$; $BD = 5,4$ et $CD = 9$; les droites (AE) et (CD) sont parallèles ; les droites (CE) et (BD) sont parallèles.

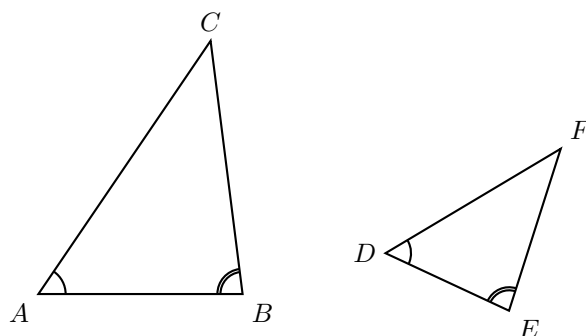


- a) Démontrer que les angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{CAE}$ ont la même mesure.
 b) Démontrer que les triangles ACE et CBD sont semblables.
 c) En déduire les longueurs des côtés du triangle ACE .

2.3. Côtés homologues : deux configurations

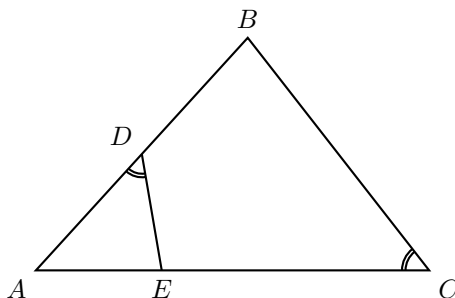
★★★☆☆

Configuration 1. Les triangles ABC et DEF ci-dessous ont leurs angles codés : $\widehat{A} = \widehat{D}$ et $\widehat{B} = \widehat{E}$. On donne : $AB = 6$; $BC = 7,5$; $AC = 9$; $DE = 4$.



- Justifier que les triangles ABC et DEF sont semblables.
- Construire et compléter un tableau des côtés homologues, puis donner le rapport de similitude de ABC vers DEF .
- Calculer EF et DF .

Configuration 2. Dans le triangle ABC , D est un point de $[AB]$ et E un point de $[AC]$ tels que $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$ (codés sur la figure). On donne : $AD = 4$; $AC = 10$; $AB = 8$; $CB = 7,5$.



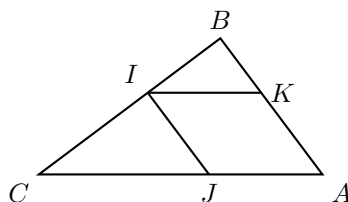
- Démontrer que les triangles ADE et ACB sont semblables.
- Préciser les côtés homologues. Piège en vue : $[AD]$ ne se compare pas à $[AB]$...
- Calculer DE et AE .

2.4. Le triangle 3-4-5

★★★☆☆

(Unité au choix.) Soit ABC un triangle tel que $AB = 3$, $BC = 4$ et $CA = 5$.

- Démontrer que ABC est rectangle en B .
- Soit $J \in [CA]$ tel que $CJ = 3$. La parallèle à (AB) passant par J coupe (BC) en I ; la parallèle à (CA) passant par I coupe (AB) en K . Reproduire la figure ci-dessous en vraie grandeur et la compléter.



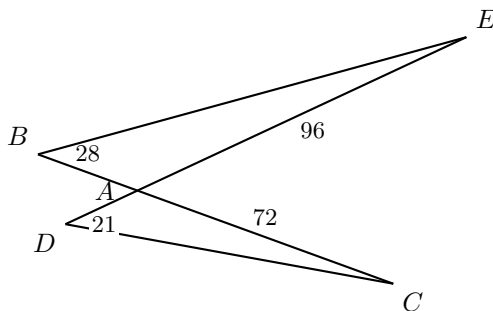
- Démontrer que les triangles JIC et ABC sont semblables (par les angles), donner le rapport de similitude de ABC vers JIC , puis calculer CI et JI .
- En déduire BI , puis démontrer que les triangles KBI et ABC sont semblables et calculer KB et KI .
- Calculer l'aire du triangle ABC , puis, sans autre calcul de longueur, les aires des triangles KBI et JIC (penser à k^2). En déduire l'aire du quadrilatère $AKIJ$.

2.5. Le papillon aux côtés proportionnels

★★★☆☆

Complément CAC du cours partie 2.3 : refaire l'exemple sans le cours, puis le prolonger.

Les segments $[BC]$ et $[DE]$ se coupent en leur intérieur en A . On donne : $AB = 28$ mm ; $AC = 72$ mm ; $AD = 21$ mm ; $AE = 96$ mm. Attention : aucune paire de droites parallèles n'est donnée.



- Démontrer que les triangles DAC et BAE sont semblables. Quel critère du cours s'applique ici, et pourquoi la caractérisation angulaire ne suffisait-elle pas seule ?
- Quel est le rapport des aires, de DAC vers BAE ? Préciser lequel des deux a la plus grande aire.
- Dans l'exercice 1.4, les « ailes » du papillon étaient parallèles. Les droites (DC) et (BE) le sont-elles ici ? Justifier. (Aide : si elles l'étaient, quels angles alternes-internes seraient égaux pour la sécante (BC) ? Comparer avec ce que dit la similitude du a).)

2.5. Enrichissement facultatif

Pourquoi l'angle doit-il être compris entre les côtés ?

Le critère CAC du cours utilise deux côtés proportionnels et l'angle compris entre ces côtés. Peut-on supprimer le mot « compris » ? On va construire et vérifier un contre-exemple, puis réparer le critère.

Notions utiles avant de commencer

L'angle compris entre les côtés $[AB]$ et $[BC]$ est l'angle de sommet B , noté $\widehat{ABC}$: les deux côtés s'y rencontrent. L'angle $\widehat{BAC}$ a pour sommet A ; il n'est pas compris entre $[AB]$ et $[BC]$.

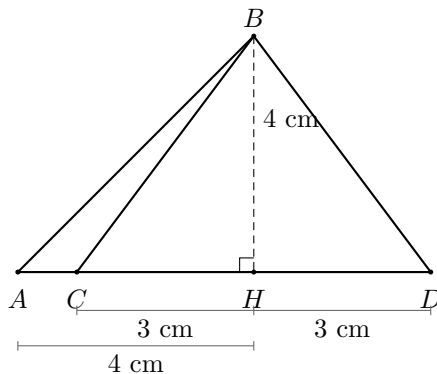
Un contre-exemple satisfait toutes les hypothèses d'une affirmation, mais pas sa conclusion. Un seul suffit à montrer que cette affirmation n'est pas toujours vraie. Par exemple, 1, 2, 4 sont trois longueurs positives, mais ne forment pas un triangle, car $1 + 2 < 4$.

Pour tester des côtés seuls, on les range du plus petit au plus grand dans chaque triangle : s'ils sont proportionnels, les trois quotients correspondants sont égaux. Exemple : $(3; 4; 5)$ et $(6; 8; 10)$ donnent $6/3 = 8/4 = 10/5 = 2$.

On utilisera Pythagore et la racine carrée : $\sqrt{u}$ est le nombre positif dont le carré vaut $u > 0$. Ainsi $\sqrt{25} = 5$; comme $25 < 30 < 36$, on a $5 < \sqrt{30} < 6$.

A. Construire les données exactes du contre-exemple

Les points A, C, H, D sont alignés dans cet ordre. On donne $AH = BH = 4$ cm, $HC = HD = 3$ cm et $(BH) \perp (AD)$. Les deux triangles étudiés sont ABC et ABD .



- Calculer AC et AD à partir de l'ordre des points.
- Appliquer le théorème de Pythagore dans BHC , BHD , puis BHA . En déduire BC , BD et AB . Justifier l'encadrement $5 < AB < 6$ sans utiliser une valeur arrondie.
- Quelle est la nature du triangle ABH ? En déduire la mesure de $\widehat{BAH}$, puis justifier que $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 45^\circ$.

B. Tester la ressemblance sans se fier au dessin

B1) Compléter le tableau suivant avec les noms des côtés et leurs longueurs exactes :

Triangle	Plus petit côté	Côté intermédiaire	Plus grand côté
ABC			
ABD			

B2) Si les triangles étaient semblables, quel rapport de ABC vers ABD donneraient les plus petits côtés ? Le quotient obtenu avec les côtés intermédiaires pourrait-il avoir cette valeur ? Conclure en justifiant.

B3) Vérifier maintenant que $AB/AB = BC/BD = 1$ et que les angles en A sont égaux. Pourquoi le critère CAC ne s'applique-t-il pourtant pas ? Rédiger l'affirmation fausse que cette figure réfute.

C. Réparer les hypothèses et transférer

C1) On veut comparer les côtés $[AB]$ et $[BC]$ aux côtés $[AB]$ et $[BD]$. Quelle égalité d'angles aurait-il fallu connaître pour employer le critère CAC ?

C2) Un autre triangle EFG vérifie $EF = 2AB$, $FG = 2BC$ et $\widehat{EFG} = \widehat{ABC}$. Justifier qu'il est semblable à ABC , préciser les sommets homologues et calculer EG . Expliquer ce qui distingue cette situation du contre-exemple.

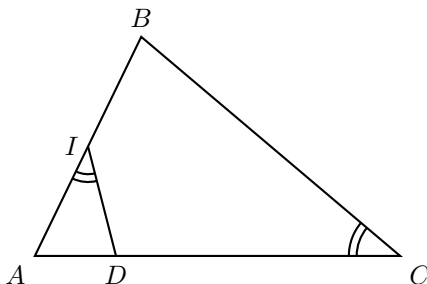
À retenir

Des rapports égaux ne suffisent pas à eux seuls. Dans le critère CAC, l'angle connu doit être celui que forment les deux côtés comparés : le mot « compris » est une hypothèse indispensable.

2.6. L'angle commun, le milieu et les aires

★★★☆☆

Dans le triangle ABC , on donne $AB = 28$ mm, $BC = 39$ mm et $AC = 42$ mm. I est le milieu de $[AB]$, et D est le point de $[AC]$ tel que $\widehat{AID} = \widehat{ACB}$ (angles codés sur la figure).



a) Démontrer que les triangles AID et ACB sont semblables, et préciser les trois paires de sommets homologues.

b) Calculer AD et ID (valeurs exactes ; AD s'écrit sous forme de fraction).

c) Démontrer que $\frac{\text{aire}(AID)}{\text{aire}(ABC)} = \frac{1}{9}$.

3. Agrandissements et réductions

3.1. Gammes : les effets de k , k^2 , k^3

★★☆☆☆

Sans calculatrice : tout se fait de tête ou presque.

a) $AB = 12$ cm, $AC = 8$ cm, $BC = 6$ cm, et le triangle AMN est une réduction du triangle ABC dans le rapport 0,25. Calculer mentalement le périmètre du triangle AMN .

b) L'aire d'un triangle est 25 cm^2 . On l'agrandit dans le rapport 2 : nouvelle aire ?

c) Un cube a un volume de $27\,000 \text{ m}^3$. On en réalise une maquette à l'échelle $\frac{1}{30}$: volume de la maquette ?

d) L'aire d'une figure a été multipliée par 9 : quel était le rapport de l'agrandissement ?

e) Les longueurs d'un solide sont multipliées par 5 : le volume est multiplié par...

f) QCM. L'écran d'un appareil photo est un rectangle de longueur 5,4 cm ; la photo imprimée a pour longueur 15 cm. Le rapport d'agrandissement est : A. 2,7 B. 2,8 C. $\frac{25}{9}$

g) QCM. Une réduction a par exemple pour rapport : A. 120 % B. $\frac{4}{3}$ C. $\frac{3}{4}$

h) Dans un agrandissement de rapport k , les mesures d'angles sont multipliées par... (attention !)

Application 3.1 bis : le fanion photographié

☆☆☆☆

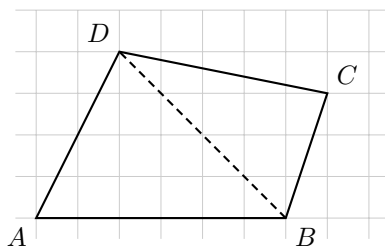
Sur une photographie, un fanion triangulaire a un côté de 4 cm et un autre de 3 cm. Le vrai fanion, semblable à celui de la photographie, a pour côté homologue au côté de 4 cm une longueur de 60 cm.

- Quel est le rapport d'agrandissement de la photographie vers le vrai fanion ?
- Quelle est la longueur réelle du côté homologue au côté de 3 cm ? Vérifier que le résultat est cohérent.

3.2. Le quadrilatère : conjecturer avec k et k^2

☆☆☆☆

$ABCD$ est le quadrilatère ci-dessous, dessiné sur un quadrillage à carreaux de 1 cm ; la diagonale $[BD]$ est tracée.



- Construire sur un quadrillage une réduction $A'B'C'D'$ de ce quadrilatère dans le rapport 0,5.
- Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{D'A'B'}$ par rapport à celle de $\widehat{DAB}$? (Aucun rapporteur nécessaire.)
- Calculer l'aire du triangle ABD , puis celle du triangle $A'B'D'$. Recopier et compléter : $\mathcal{A}' = 0,5 \cdots \times \mathcal{A}$.
- Sans construire, donner l'aire du triangle $A''B''D''$ pour un agrandissement $A''B''C''D''$ de rapport 1,2.
- Recopier et compléter la conjecture : « Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k , les longueurs sont..., les angles sont..., les aires sont... ».

3.3. Sens inverse : retrouver k

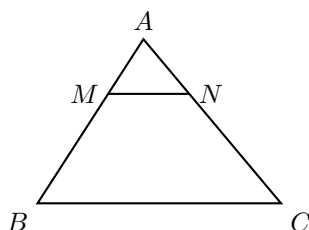
☆☆☆☆

- Argumenter. A' et B' sont des points des demi-droites $[CA)$ et $[CB)$ tels que (AB) et $(A'B')$ soient parallèles, avec $AB = 1,5$ cm et $A'B' = 2$ cm. L'aire du triangle ABC est $2,7$ cm². Démontrer que les triangles CAB et $CA'B'$ sont semblables (par les angles), puis calculer l'aire du triangle $CA'B'$.
- L'aire d'une figure est 72 cm². Après agrandissement, la figure obtenue a une aire de $1\,800$ cm². Quel est le rapport de cet agrandissement ?
- QCM. Un rectangle $A'B'C'D'$ d'aire 24 cm² est l'agrandissement de rapport 1,25 d'un rectangle $ABCD$. L'aire (en cm²) de $ABCD$ est : A. 15,36 B. 19,2 C. 30 D. 37,5
- Sur un plan à l'échelle $\frac{1}{3\,000}$, un terrain de football a une aire de 8 cm². Quelle est l'aire (en m²) de ce terrain dans la réalité ? Le résultat est-il vraisemblable pour un terrain de football ?

3.4. Arthur a-t-il raison ?

☆☆☆☆

On sait que : les points A, M, B sont alignés dans cet ordre, ainsi que A, N, C ; les droites (MN) et (BC) sont parallèles ; $AB = 6$ cm et $AM = 2$ cm ; l'aire du triangle ABC est de 9 cm².



- Arthur assure : « Le triangle AMN est une réduction du triangle ABC ». A-t-il raison ? Expliquer, et si oui donner le coefficient de réduction.
- En déduire l'aire du triangle AMN .

3.5. La statue de la Liberté : regard critique

★★★☆☆

La statue de la Liberté à New York, d'une hauteur (hors socle) de 46 m, a été conçue par le sculpteur français Auguste Bartholdi (1834–1904). Une réplique est située sur l'île aux Cygnes, à Paris ; sa hauteur est 11,50 m.

- Quel est le rapport de réduction de la statue new-yorkaise vers la statue parisienne ?
- Porter un regard critique. La masse d'une statue est liée au volume des matériaux utilisés. Pour tester un modèle simplifié inspiré de ces statues, on retient ici des masses de 225 tonnes et 14 tonnes ; ce sont les données conventionnelles de cet exercice. Ces masses sont-elles compatibles avec une réduction de rapport $1/4$ de toutes les dimensions, y compris les épaisseurs, utilisant les mêmes matériaux aux mêmes endroits ? Justifier par un calcul. Peut-on en déduire que les formes extérieures ne sont pas semblables ?

3.6. Les cônes glacés

★★★★

Une société propose trois formats de cônes glacés de même forme : le grand, d'un volume de 720 mL, le moyen et le petit.

- Le cône moyen est une réduction du grand dans le rapport 75 %. Calculer son volume.
- Le petit cône est une réduction du grand cône dans le rapport 50 %. Marie affirme : « Le volume du petit cône est égal à la moitié de celui du cône moyen. » A-t-elle raison ? Justifier par un calcul complet.
- Question de synthèse : de combien de pour cent le volume baisse-t-il quand les longueurs baissent de 25 % ? Formuler la morale de l'exercice en une phrase.

3.7. Doubler un cube : le problème de Délos

★★☆☆☆

(Le nombre positif dont le cube vaut 2 se note $\sqrt[3]{2}$, on lit : « racine cubique de 2 » ; on donne $\sqrt[3]{2} \approx 1,26$.)

Un cube a une arête de 10 cm. On veut fabriquer un second cube dont le volume est le double du premier (le vieux problème de l'autel de Délos).

- Calculer le volume du cube de départ.
- Léa propose : « il suffit de doubler l'arête, donc de prendre 20 cm ». Calculer le volume d'un cube d'arête 20 cm. Léa a-t-elle raison ? Par combien a-t-elle en réalité multiplié le volume ?
- Par quel nombre k faut-il multiplier l'arête pour que le volume soit multiplié par 2 ? En déduire l'arête du second cube, au millimètre près (utiliser $\sqrt[3]{2} \approx 1,26$).
- Vérifier : calculer le volume d'un cube ayant cette arête, et constater qu'il vaut bien (à peu près) le double du volume de départ.

3.8. Scratch : deux triangles de même forme

★★☆☆☆

Ajouter l'extension Stylo et créer la variable `cote`. L'unité de longueur est le pas Scratch.

- Prévoir. Compléter les deux nombres manquants du script, pour tracer un triangle équilatéral de côté 60 pas.

Quand le drapeau vert est cliqué :

relever le stylo ; effacer tout ; aller à $x = -180$, $y = 60$; s'orienter à 90° ;

mettre `cote` à 60 ; mettre le stylo en position d'écriture ;

répéter $\square$ fois :

avancer de `cote` pas ; tourner de $\square$ degrés vers la droite ;

relever le stylo.

- Programmer et exécuter. Construire le script complété, puis le lancer. Vérifier que le triangle se ferme. Expliquer pourquoi l'angle de rotation n'est pas 60° .
- Agrandir. À la suite du script, sans effacer le premier dessin : aller à $x = 20$, $y = 60$, s'orienter à 90° , mettre `cote` à 90, mettre le stylo en position d'écriture, reprendre la même boucle, puis relever le stylo. Prévoir le rapport d'agrandissement, puis exécuter.
- Justifier. Pourquoi les deux triangles sont-ils semblables ? Calculer les deux périmètres. Par combien l'aire est-elle multipliée du premier au second triangle ? Conserver le programme et une capture des deux triangles, accompagnée de ces justifications.
- Réinvestir. Remplacer 90 par 30. Prévoir les facteurs sur les longueurs, les angles, le périmètre et l'aire du second triangle par rapport au premier ; vérifier en lançant le script.

4. Problèmes

4.1. Le parc triangulaire à l'échelle

★★★☆☆

On dessine à l'échelle un parc de jeux triangulaire DEF . Dimensions réelles : $DE = 12$ m, $EF = 9$ m, $DF = 15$ m. Sur le dessin, $DE = 6$ cm.

- Avant tout calcul : faire un croquis à main levée avec les données réelles et celle du dessin.
- Quelle est l'échelle du dessin ?
- Donner les longueurs EF et DF sur le dessin.
- Démontrer que le parc réel est rectangle en E , puis calculer son aire réelle.
- L'aire du triangle dessiné est-elle égale à l'aire réelle divisée par 200 ? Justifier sans calculer l'aire du dessin, puis vérifier par le calcul.

4.2. La maquette d'avion au 1/125

★★★☆☆

Une maquette d'un avion de ligne très gros-porteur est réalisée à l'échelle $\frac{1}{125}$.

- La longueur de l'avion est 73 m. Quelle est celle de la maquette ? Donner le résultat en centimètres.
- L'aire de la voilure de la maquette est $540,8$ cm². Quelle est l'aire de la voilure (en m²) de l'avion ?
- Le réservoir de l'avion contient 310 000 L. Quelle est la capacité (en cm³) de celui de la maquette ?
- Chaque résultat est-il vraisemblable ? (Une phrase par question.)

4.3. La cascade de parallèles

★★★★☆

Soit ACB' un triangle, et soit $B \in [AC]$ un point distinct de A et C , plus près de A que de C .

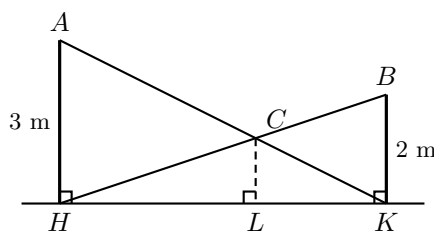
- La parallèle à (BB') passant par C coupe (AB') en C' .
 - La parallèle à $(B'C)$ passant par C' coupe (AC) en D .
- Tracer une figure (triangle « pas trop grand », B plus près de A que de C) et la compléter.
 - Démontrer que les triangles ABB' et ACC' sont semblables, puis que $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}$.
 - Démontrer de même, avec les triangles $AB'C$ et $AC'D$, que $\frac{AB'}{AC'} = \frac{AC}{AD}$.
 - En déduire que $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$.
 - On suppose $AB = 1$ et on note $AC = x$. Montrer que $AD = x^2$. Comment poursuivre la construction pour obtenir un segment de longueur x^3 ? (On dit que AC est la moyenne géométrique de AB et AD : une machine à multiplier par x , inventée bien avant la calculatrice.)

4.4. Les deux poteaux

★★★☆☆

Deux poteaux verticaux $[HA]$ (hauteur $AH = 3$ m) et $[KB]$ (hauteur $BK = 2$ m) sont plantés sur un sol horizontal, leurs pieds H et K étant distants de quelques mètres. On tend un câble du sommet A au pied K , et un câble du sommet B au pied H : les câbles se croisent en C . On note L le point du sol situé à la verticale de C : les points H, L, K sont alignés et $(CL) \perp (HK)$.

À quelle hauteur CL les deux câbles se croisent-ils ?



- Justifier que les droites (AH) , (CL) et (BK) sont parallèles.
- Démontrer que les triangles KLC et KHA sont semblables, et en déduire que $\frac{CL}{3} = \frac{KL}{KH}$.
- Démontrer de même que $\frac{CL}{2} = \frac{HL}{HK}$.
- En additionnant les deux égalités précédentes, calculer CL .

- e) Relire l'énoncé : une information que l'on s'attendait à devoir utiliser n'est jamais intervenue. Laquelle ? Qu'est-ce que cela signifie concrètement pour les deux poteaux ?

4.4. Enrichissement facultatif 🏠

Choisir les poteaux : trouver toutes les solutions

Dans l'exercice initial, les hauteurs des poteaux étaient données. On inverse maintenant le problème : les câbles doivent se croiser à 2 m du sol, et les hauteurs des poteaux doivent être des nombres entiers de mètres. Quels choix sont possibles ?

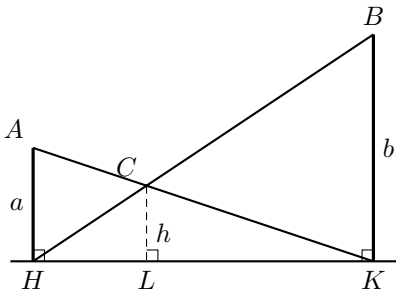
Notions utiles avant de commencer

On reprend la configuration de l'exercice 4.4. Les poteaux sont verticaux sur un sol horizontal ; leurs pieds sont distincts. Les câbles joignent chaque sommet au pied opposé. Les nombres positifs a, b, h désignent les mesures, en mètres, de AH, BK, CL .

L'inverse d'un nombre positif u est $1/u$; leur produit vaut 1. Exemple : si $1/b = 2/3$, alors $b = 3/2$, car $(2/3)(3/2) = 1$. Ce résultat est une hauteur possible, mais ce n'est pas un nombre entier de mètres.

Pour des nombres positifs, prendre l'inverse renverse l'ordre : plus le dénominateur est grand, plus la fraction de numérateur 1 est petite. Par exemple, $5 > 2$ et $1/5 < 1/2$.

On ne distingue pas un choix de poteaux de celui obtenu en échangeant la gauche et la droite. On appellera donc a la plus petite des deux hauteurs, en autorisant l'égalité : $a \leq b$.



A. Obtenir une relation valable pour toutes les hauteurs

- A1) Reprendre les deux paires de triangles semblables de l'exercice initial. Établir $h/a = KL/KH$ et $h/b = HL/HK$, puis additionner pour obtenir $h/a + h/b = 1$. Pourquoi peut-on ensuite diviser par h ? En déduire

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

- A2) Vérifier qu'avec des poteaux de 3 m et 6 m, le croisement se trouve à 2 m du sol. L'écartement des pieds change-t-il ce résultat ?
- A3) Comme $1/b > 0$, comparer $1/h$ et $1/a$, puis h et a . Faire de même avec b . Que signifie ce résultat sur la figure ?

B. Limiter la recherche pour ne rien oublier

On impose maintenant $h = 2$, avec a et b entiers positifs et $a \leq b$.

- B1) À l'aide de A3, expliquer pourquoi a ne peut être ni 1 ni 2.
- B2) Supposons $a \geq 5$. Pourquoi aurait-on aussi $b \geq 5$? Montrer alors que $1/a + 1/b \leq 2/5 < 1/2$, ce qui est impossible. Quelles sont les seules valeurs entières de a qu'il reste à examiner ?
- B3) Pour chacune, compléter le tableau. Calculer d'abord $1/b$, puis prendre son inverse pour trouver b .

a	$1/b = 1/2 - 1/a$	b	Entier et $b \geq a$?
3			
4			

- B4) Vérifier chaque paire obtenue dans la relation de A1. Donner tous les choix de hauteurs, sans compter deux fois une paire échangée. Expliquer séparément pourquoi chacun convient et pourquoi aucun autre n'est possible.

C. Transférer : imposer un croisement à 3 m

- C1) On conserve des hauteurs entières et $a \leq b$, mais on impose $h = 3$. Trouver toutes les paires possibles. Commencer par encadrer a , puis dresser un tableau donnant $1/b$ et b . Un candidat fractionnaire ne satisfait pas la contrainte de départ.
- C2) Parmi ces choix, on veut que le plus grand poteau soit le moins haut possible. Quel choix retenir ? Est-ce celui qui utilise le plus petit poteau possible ? Justifier les deux réponses.

À retenir

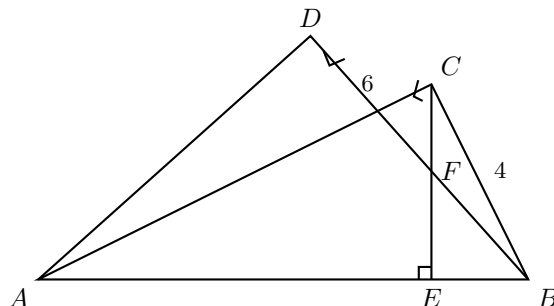
Une formule permet de tester des choix. Pour trouver toutes les solutions, on doit aussi limiter la recherche, examiner tous les cas restants et vérifier les contraintes. Chercher un exemple, chercher toutes les solutions et choisir la meilleure selon un critère sont trois tâches différentes.

4.5. Cascade de similitudes : les hauteurs en action 🏰

★★★★

ABC et ABD sont deux triangles rectangles respectivement en C et en D , construits du même côté de leur hypoténuse commune $[AB]$, avec $BC = 4$ et $BD = 6$. Dans le triangle ABC , E est le pied de la hauteur issue de C . Le segment $[CE]$ coupe le segment $[BD]$ en F .

Objectif : calculer BF , sans jamais connaître AB .



- Démontrer que les triangles ABC et CBE sont semblables, puis en déduire que $BC^2 = BE \times BA$.
- Démontrer que les triangles ABD et FBE sont semblables, puis en déduire que $BF \times BD = BE \times BA$.
- Déduire des questions a) et b) que $BF = \frac{BC^2}{BD}$, puis calculer BF (valeur exacte).
- Question de sens : la longueur AB n'était pas donnée, et pourtant BF est parfaitement déterminé. Que devient BF si on refait la figure avec un AB plus grand (toujours $BC = 4$ et $BD = 6$) ?

5. Justifier et raisonner

5.1. Repérer l'erreur : la copie de Naïm 🎯

★★☆☆

Les triangles ABC et DEF sont semblables, avec $\widehat{A} = \widehat{D}$ et $\widehat{B} = \widehat{E}$. On donne $AB = 4$, $BC = 6$ et $DE = 6$. Il faut calculer EF .

Copie de Naïm. « $BC = 6$ et $DE = 6$, donc le rapport vaut $\frac{6}{6} = 1$: les triangles sont égaux, et $EF = BC = 6$. »

- Le résultat de Naïm est faux. Identifier précisément l'erreur commise (quel geste de la méthode a été sauté ?).
- Rédiger la solution correcte et donner la vraie valeur de EF .

5.2. Contrôler la cohérence : sans calculer 🎯

★★☆☆

Chacune des affirmations suivantes est fausse, et on peut le voir sans poser un seul calcul. Expliquer pourquoi, en une phrase à chaque fois.

- « Un agrandissement de rapport 3 a multiplié l'aire de la figure par 6. »
- « Dans mon triangle réduit à l'échelle $\frac{1}{2}$, le côté de 8 cm est devenu un côté de 16 cm. »
- « Ces deux triangles sont semblables : dans le premier, le plus grand côté fait face au plus grand angle ; dans le second, qui n'est pas équilatéral, le plus grand côté fait face au plus petit angle. »
- « La maquette est à l'échelle $\frac{1}{100}$, donc la surface de peinture nécessaire est 100 fois plus petite que pour l'objet réel. »

5.3. Rédiger une solution complète 🎯

★★★★

Les segments $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O . On sait que $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$, et on donne : $OA = 6$; $OC = 4$; $OB = 5,4$; $CD = 5$. Rédiger une solution complète et autonome, sur le canevas travaillé dans le chapitre :

- démontrer que les triangles OAB et OCD sont semblables (deux paires d'angles égaux, chacune justifiée) ;
- appairer, poser le tableau, puis calculer OD et AB ;
- vérifier (rapports égaux, cohérence grand/petit) et conclure par une phrase.

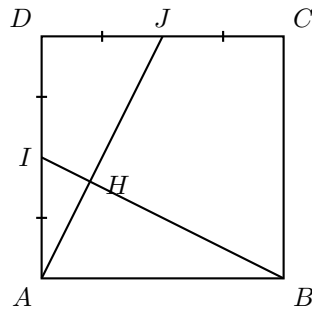
1. Modifier et prévoir. Dans l'énoncé précédent, remplacer $OC = 4$ par $OC = 3$, sans changer OA , OB ni CD . Avant de calculer, prévoir l'effet sur le rapport de similitude de OAB vers OCD , sur OD et sur AB , puis vérifier.
2. Créer sous contrainte. Inventer un problème sur deux triangles semblables, le second étant une réduction du premier dans le rapport $\frac{3}{4}$, avec une longueur inconnue dans chaque triangle et des données suffisantes pour les calculer. Préciser sans ambiguïté la correspondance des sommets.
3. Résoudre, vérifier, échanger. Résoudre en justifiant la similitude et l'appariement, vérifier les trois rapports, puis faire résoudre l'énoncé par un camarade. Réviser toute donnée inutile, manquante ou ambiguë.

5.4. Démontrer une perpendicularité : les deux milieux du carré

★★★☆☆

$ABCD$ est un carré. I est le milieu de $[AD]$ et J le milieu de $[DC]$. Les segments $[AJ]$ et $[BI]$ se coupent en H .

Objectif : démontrer que $(AJ) \perp (BI)$, sans rapporteur, sans mesure, sans quadrillage.



- a) Démontrer que les triangles ABI et DAJ sont égaux (citer précisément le cas d'égalité utilisé : section 1 du cours).
- b) En déduire que $\widehat{ABI} = \widehat{DAJ}$ et que $\widehat{AIB} = \widehat{DJA}$.
- c) Démontrer que les triangles AHB et JDA sont semblables.
- d) Conclure que $\widehat{AHB} = 90^\circ$.
- e) Autre méthode. Retrouver le résultat en calculant la somme $\widehat{HAB} + \widehat{ABH}$ dans le triangle ABH . Comparer les deux méthodes : laquelle est la plus courte, et pourquoi ?

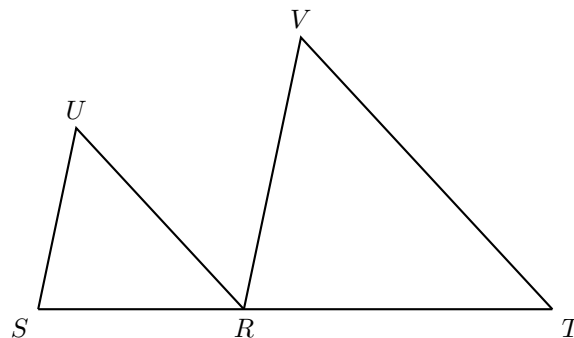
6. Sujets type Brevet

Les sujets 1 à 6 sont de niveau , les sujets 7 à 9 de niveau . Les sujets 1 et 2 reprennent volontairement le squelette de l'exercice 2.2 : c'est un entraînement au format.

6.1. Brevet 1 : Triangles semblables sur une droite

★★★☆☆

Sur la figure ci-dessous : le point R appartient au segment $[ST]$; $SR = 4$; $ST = 10$; $RV = 5,4$ et $TV = 7,2$; les droites (SU) et (RV) sont parallèles ; les droites (RU) et (TV) sont parallèles.

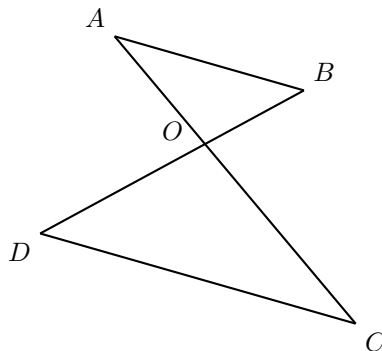


- a) Démontrer que les angles $\widehat{USR}$ et $\widehat{VRT}$ ont la même mesure.
- b) Démontrer que les triangles SRU et RTV sont semblables.
- c) En déduire les longueurs SU et RU .

6.2. Brevet 2 : Le papillon

★★★☆☆

Les segments $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O , et les droites (AB) et (CD) sont parallèles. On donne : $OA = 3$; $OB = 2,4$; $AB = 4,2$; $OC = 5$.



- Démontrer que les triangles OAB et OCD sont semblables.
- Calculer CD et OD .

6.3. Brevet 3 : Semblables et aires

★★★☆☆

Les triangles ABC et DEF sont semblables, avec $\hat{A} = \hat{D}$ et $\hat{B} = \hat{E}$. On donne : $AB = 6$ cm ; $DE = 4$ cm ; l'aire du triangle ABC vaut $13,5$ cm² ; le périmètre du triangle ABC vaut 18 cm.

- Donner le rapport de similitude de ABC vers DEF .
- Calculer le périmètre du triangle DEF .
- Calculer l'aire du triangle DEF .

6.4. Brevet 4 : Reconnaître, puis calculer

★★★☆☆

Le triangle JKL vérifie $\hat{J} = 35^\circ$ et $\hat{K} = 60^\circ$. Le triangle MNP vérifie $\hat{M} = 85^\circ$ et $\hat{N} = 60^\circ$.

- Démontrer que ces deux triangles sont semblables.
- Préciser les trois paires de sommets homologues.
- On donne $JK = 8$ cm, $KL \approx 4,6$ cm (arrondi au dixième) et $PN = 6$ cm. Estimer la longueur NM à partir de ces données.

6.5. Brevet 5 : Le plan de l'appartement

★★★☆☆

Un architecte fournit le plan d'un appartement à l'échelle $\frac{1}{50}$. La hauteur sous plafond est de 2,50 m.

- Sur le plan, le séjour a une longueur de 12 cm. Quelle est sa longueur réelle, en mètres ?
- Sur le plan, la chambre a une aire de 48 cm². Quelle est son aire réelle, en m² ?
- Une donnée de l'énoncé n'a servi à rien. Laquelle, et pourquoi est-ce normal ?

6.6. Brevet 6 : La maquette de voiture au 1/18

★★★☆☆

(Jumeau de l'exercice 4.2, pour réviser.) Une maquette de voiture de collection est à l'échelle $\frac{1}{18}$.

- La voiture réelle mesure 4,32 m de long. Quelle est la longueur de la maquette, en cm ?
- Le pare-brise réel a une aire de 1,296 m². Quelle est l'aire du pare-brise de la maquette, en cm² ?
- Le coffre réel a un volume de 291,6 L. Quel est le volume du coffre de la maquette, en mL ?

6.7. Brevet 7 : Les deux plateaux

★★★★☆

Un artisan fabrique deux plateaux triangulaires semblables. Le petit a un périmètre de 60 cm et une aire de 150 cm² ; le grand a un périmètre de 90 cm.

- Justifier que le rapport de similitude du petit vers le grand vaut 1,5. (Pourquoi le rapport des périmètres est-il égal à k ?)
- Calculer l'aire du grand plateau.
- L'artisan vend le petit plateau 24 € et affirme : « le grand coûte 1,5 fois plus cher, car il est 1,5 fois plus grand ». Si le prix est proportionnel à la quantité de bois (l'aire), que devrait coûter le grand plateau ?

6.8. Brevet 8 : Formats de photo

★★★★

Les tirages photo standards ont pour formats (en cm) : 10×15 , 13×18 et 40×60 .

- Le format 40×60 est-il un agrandissement du format 10×15 ? Si oui, de quel rapport ?
- Dans ce cas, par combien l'aire du tirage est-elle multipliée ?
- Le format 13×18 est-il un agrandissement du format 10×15 ? Expliquer pourquoi le laboratoire doit rogner l'image s'il veut remplir ce papier sans marge et sans déformer l'image.

6.8. Enrichissement facultatif

Un rectangle qui garde son format lorsqu'on le coupe en deux

Après les formats de photo, on cherche un format de feuille particulier. On coupe un rectangle en deux rectangles égaux, perpendiculairement à ses grands côtés. On voudrait que chaque moitié, après un quart de tour, ait la même forme que la feuille entière.

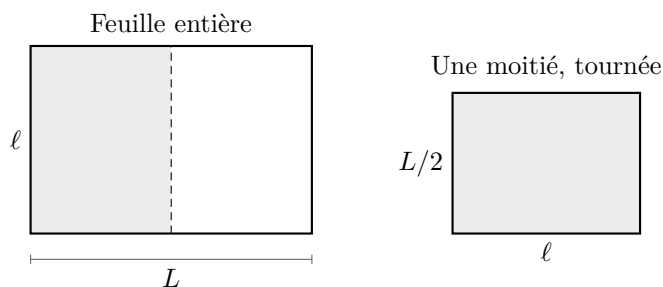
Notions utiles avant de commencer

Le grand côté mesure L et le petit côté ℓ , avec $0 < \ell < L$. Les deux nombres sont dans la même unité. Le rapport de format est $r = L/\ell$: il compare le grand côté au petit. Deux rectangles ont la même forme exactement lorsque leurs rapports de format sont égaux. Exemple : 4×6 et 10×15 ont tous deux le rapport $3/2$, même si on tourne l'une des feuilles.

Couper le grand côté en deux donne des moitiés de dimensions ℓ et $L/2$. Il faut les ranger du plus petit au plus grand avant de comparer les formats : le grand côté de la moitié n'est pas forcément celui issu du grand côté initial.

Pour $u > 0$, $\sqrt{u}$ est le nombre positif dont le carré vaut u . Par exemple, $\sqrt{9} = 3$, puisque $3^2 = 9$. Si $x > 0$ et $x^2 = u$, on écrit donc $x = \sqrt{u}$. Une valeur décimale arrondie peut aider à tracer, mais ne remplace pas une égalité exacte.

A. Comprendre la coupure et l'appariement



- Tester une feuille de dimensions 10×15 . Donner les dimensions d'une moitié, son grand côté et son petit côté. Comparer son rapport de format à celui de la feuille entière. La moitié de l'aire suffit-elle à garantir la même forme ?
- Écarter les feuilles trop allongées : si $L \geq 2\ell$, le grand côté d'une moitié vaut $L/2$ et le petit vaut ℓ (égaux si $L = 2\ell$). Comparer les deux quotients de longueurs homologues. Pourquoi ce cas ne peut-il pas convenir ?

B. Trouver le format et vérifier qu'il convient

On cherche désormais parmi les rectangles tels que $\ell < L < 2\ell$. Le grand côté d'une moitié est donc ℓ et le petit est $L/2$.

- Écrire l'égalité entre les deux coefficients « moitié / feuille entière ». Montrer qu'elle impose $L^2 = 2\ell^2$, puis $r^2 = 2$. Quel est le seul rapport de format positif possible ?
- Vérifier réciproquement que $L^2 = 2\ell^2$ donne bien les mêmes coefficients sur les deux côtés. Pour $\ell = 10$ cm, donner la valeur exacte de L , puis son arrondi au centième. Donner le coefficient de réduction exact vers une moitié et vérifier son effet sur l'aire.
- Recommencer la même coupure sur une moitié : pourquoi garde-t-on encore le format ? Après deux coupures successives, quelle fraction de l'aire initiale représente l'un des quatre morceaux ? Quel est le rapport de réduction en longueur par rapport à la feuille initiale ?

C. Transférer et distinguer exact d'approché

- On cherche maintenant un nouveau format, avec $\ell < L < 3\ell$, qui se conserve lorsqu'on partage le grand côté en trois parties égales. Les trois morceaux ont pour dimensions ℓ et $L/3$. Déterminer le rapport de format nécessaire et vérifier qu'il suffit. Donner le coefficient de réduction et la fraction d'aire d'un morceau.
- Une feuille mesure exactement 21 cm sur 29,7 cm. Garde-t-elle exactement son format après la coupure en deux ? Comparer $29,7^2$ et 2×21^2 . Expliquer pourquoi une petite différence peut être invisible sur un dessin sans être nulle.

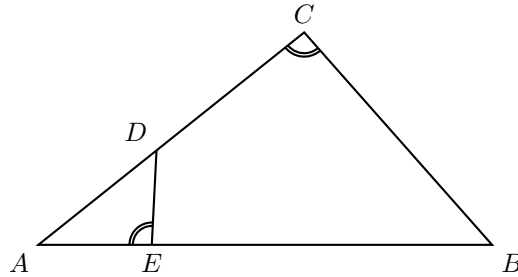
À retenir

Pour retrouver une forme après une découpe, on identifie d'abord les côtés homologues, quitte à tourner un morceau. On traduit ensuite la conservation de la forme par des rapports égaux et on vérifie la solution. Une égalité d'aires seule ne suffit pas.

6.9. Brevet 9 : L'angle commun caché 🏰

★★★★

Dans le triangle ABC , E est un point de $[AB]$ et D un point de $[AC]$ tels que $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$. On donne : $AE = 3$; $AC = 9$; $AD = 4$; $BC = 7,5$.



- Démontrer que les triangles AED et ACB sont semblables.
- Préciser les côtés homologues, puis calculer ED et AB .
- Vérifier que E est bien à l'intérieur du segment $[AB]$ avec la longueur trouvée. Pourquoi ce contrôle est-il utile ?

7. Pour aller plus loin (banque triée)

Banque triée par type : interdisciplinaires (7.1 à 7.3), approfondissements (7.4 à 7.6 et 7.8), défis (7.7, 7.9 et 7.10). Les exercices 7.8 et 7.9 démontrent le théorème de Pythagore par deux chemins différents ; 7.10 les compare à un troisième.

7.1. Géographie : lire une carte 📍

★★★☆☆

- Sur une carte de France à l'échelle $\frac{1}{2\,000\,000}$, la distance Paris–Lyon à vol d'oiseau mesure 19,6 cm. Quelle est la distance réelle, en km ?
- Par l'autoroute, on parcourt environ 465 km. Pourquoi les deux réponses diffèrent-elles ? Laquelle la carte donne-t-elle ?
- Sur une carte régionale à l'échelle $\frac{1}{200\,000}$, un lac occupe 4,5 cm². Calculer son aire réelle en km² (réinvestir les puissances de 10 du chapitre 01 : 1 km² = 10¹⁰ cm²).

7.2. SVT : au microscope 📷

★★★☆☆

Une photographie prise au microscope est imprimée de sorte que toutes les longueurs de l'objet sont agrandies dans le rapport $k = 400$.

- Une cellule mesure 50 μm (1 μm = 0,001 mm). Quelle est sa taille sur la photographie imprimée, en cm ?
- Par combien l'aire de l'image de la cellule est-elle multipliée ?
- Écrire 50 μm en mètres, en notation scientifique (chapitre 01).

7.3. Le géant impossible 🏰

★★★★

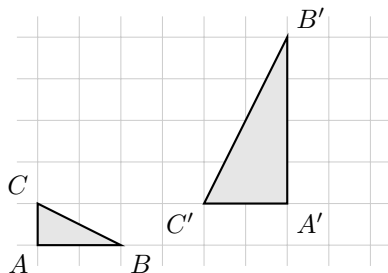
Dans les contes, un géant est un homme agrandi dans le rapport 10. Prenons un homme de 1,80 m et 80 kg.

- Quelle serait la taille du géant ?
- On suppose les mêmes matériaux et les mêmes masses volumiques : la masse est alors proportionnelle au volume du corps. Quelle serait la masse du géant, en tonnes ?
- La solidité d'un os est proportionnelle à l'aire de sa section (la surface de la « tranche »). Par combien cette aire est-elle multipliée ?
- Chaque cm² d'os du géant doit donc porter combien de fois plus de masse que chez l'homme ? Expliquer pourquoi le géant serait plus fragile. Peut-on affirmer que ses os casseraient sans connaître leur résistance initiale ? (C'est la « loi carré-cube », qui explique aussi pourquoi les grands animaux ont des pattes proportionnellement plus épaisses.)

7.4. Des transformations pour passer de l'un à l'autre 🏰

★★★☆☆

(Préparation du chapitre 06.) Sur le quadrillage ci-dessous (carreaux de 1), on considère les triangles $T_1 = ABC$ et $T_2 = A'B'C'$.



- En lisant les longueurs sur le quadrillage, vérifier que T_2 est semblable à T_1 et donner le rapport de similitude de T_1 vers T_2 .
- Décrire un enchaînement de transformations connues (déplacement, quart de tour, agrandissement) qui envoie T_1 sur T_2 . Plusieurs réponses sont possibles : en proposer une, précisément décrite.

L'« agrandissement de centre fixé » employé au b) s'appelle une homothétie : elle est étudiée au chapitre 06.

7.5. La réciproque de la caractérisation 🏰

★★★★

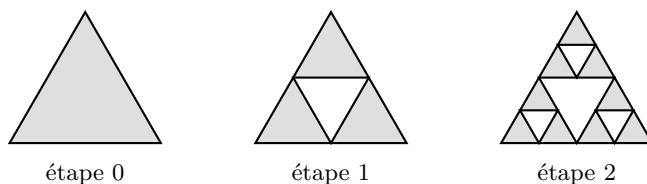
Dans le cours, le sens réciproque est présenté comme un approfondissement. Reprenons sa démonstration. Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles tels que $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$, avec $0 < k < 1$. Le cas $k = 1$ est réglé par le cas d'égalité « côté-côté-côté » ; si $k > 1$, on échange les rôles des triangles pour obtenir un rapport $1/k < 1$.

- Placer M sur $[AB]$ tel que $AM = A'B'$; la parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N . Faire une figure.
- Justifier que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$ (acquis de 4°).
- Montrer que $\frac{AM}{AB} = k$, puis en déduire $AN = A'C'$ et $MN = B'C'$.
- En déduire que les triangles AMN et $A'B'C'$ sont égaux (préciser le cas d'égalité), puis que les angles de $A'B'C'$ sont égaux à ceux de ABC (justifier soigneusement le passage de AMN à ABC : quels angles sont égaux, et pourquoi ?).

7.6. Le triangle de Sierpiński 🏰

★★★★

(Vers le lycée.) On part d'un triangle équilatéral de côté 8 cm, d'aire notée $\mathcal{A}$ (étape 0). À chaque étape, on remplace chaque triangle par les 3 triangles « des coins », obtenus en joignant les milieux des côtés (le triangle central est évidé).



- Justifier que chaque petit triangle de l'étape 1 est une réduction de rapport $\frac{1}{2}$ du triangle initial. Quelle est l'aire de chacun, en fonction de $\mathcal{A}$?
- En déduire l'aire totale grisée à l'étape 1, puis à l'étape 2, en fonction de $\mathcal{A}$. L'écrire sous la forme $\left(\frac{3}{4}\right)^n \mathcal{A}$ (puissances du chapitre 01 !).
- Calculer le total des périmètres des triangles grisés aux étapes 0, 1 et 2. Que constate-t-on ?
- Si on continue indéfiniment, vers quoi l'aire grisée semble-t-elle se diriger ? Et le périmètre total ? (Réponse en une phrase : c'est le paradoxe des fractales.)

7.7. Défi : presque jumeaux 🏰

★★★☆☆

Énoncé bref, raisonnement pur : tout le monde peut chercher.

Existe-t-il deux triangles semblables mais non égaux qui ont deux longueurs de côtés en commun ? Trouver un exemple (avec des longueurs explicites, et la vérification qu'il s'agit bien de triangles) ou démontrer que c'est impossible.

7.7. Enrichissement facultatif

Presque jumeaux : de l'exemple à toute une famille

À lire après avoir cherché le défi initial.

L'exercice initial demande un exemple. On cherche maintenant toutes les paires de triangles semblables de rapport $3/2$, ayant deux longueurs distinctes de côtés en commun, avec leurs six longueurs entières en centimètres. On décrit les triangles par leurs longueurs : déplacer ou retourner une figure ne crée pas une nouvelle solution.

Notions utiles avant de commencer

Une longueur commune apparaît dans les deux triangles. Cela ne signifie pas que les côtés de cette longueur sont homologues. Les côtés homologues occupent le même rang lorsqu'on range les longueurs de chaque triangle du plus petit au plus grand.

Exemple déjà obtenu : $(4; 6; 9)$ et $(6; 9; 13,5)$ sont semblables de rapport $3/2$. Leurs longueurs communes sont 6 et 9, mais le côté de longueur 6 du premier correspond à celui de longueur 9 du second.

Deux longueurs distinctes sont deux valeurs différentes : deux côtés mesurant chacun 6 cm ne représentent qu'une longueur distincte. Pour trois nombres $0 < a \leq b \leq c$, il existe un triangle non aplati si et seulement si $a + b > c$.

Rappel d'arithmétique : un produit de deux entiers impairs est impair. Donc, si $3u$ ou $9u$ est pair, u est pair. Par exemple, 3×5 est impair, tandis que 3×6 est pair. Un entier positif pair s'écrit $2v$, avec v entier positif.

A. Comprendre comment deux longueurs peuvent se retrouver

Dans cette partie, on considère un agrandissement de rapport $k > 1$.

- A1) Dans l'exemple $(4; 6; 9)$ et $(6; 9; 13,5)$, écrire les trois quotients entre côtés homologues. Indiquer le rang de la longueur 6 dans chacun des triangles, puis faire de même pour 9. Pourquoi cet exemple ne répond-il pas encore à la nouvelle contrainte de longueurs entières ?
- A2) Un triangle isocèle, éventuellement équilatéral, a au plus deux longueurs distinctes. Expliquer pourquoi sa plus petite longueur n'apparaît pas dans un agrandissement de rapport $k > 1$. Peut-il alors partager deux longueurs distinctes avec cet agrandissement ?
- A3) On peut désormais noter $a < b < c$ les trois longueurs du premier triangle. Celles du second sont $ka < kb < kc$. Pourquoi a n'est-il pas commun aux deux triangles ? Pourquoi kc n'est-il pas commun ? En déduire que les deux longueurs communes sont nécessairement b, c dans le premier et ka, kb dans le second. Justifier alors $b = ka$ et $c = kb$: on associe ici les valeurs communes dans l'ordre, pas les côtés homologues.

B. Imposer le rapport $3/2$ et les longueurs entières

On fixe maintenant $k = 3/2$ et on conserve la notation a pour le plus petit côté du premier triangle.

- B1) À l'aide de A3, compléter :

	petit côté	côté intermédiaire	grand côté
premier triangle	a	$\dots$	$\dots$
second triangle	$\dots$	$\dots$	$\frac{27a}{8}$

Pour tout $a > 0$, vérifier que la somme des deux plus petits côtés du premier est supérieure au troisième. Pourquoi le second est-il alors aussi un triangle ?

- B2) Les six longueurs doivent être entières. Pourquoi $3a/2$ entier impose-t-il $a = 2u$ avec u entier ? En remplaçant dans $9a/4$, montrer ensuite que $u = 2v$. Enfin, en remplaçant dans $27a/8$, montrer que $v = 2n$. En déduire que a est un multiple de 8.
- B3) Remplacer a par $8n$ dans les six longueurs. Réciproquement, vérifier que tout entier $n \geq 1$ fournit bien deux triangles non égaux, semblables de rapport $3/2$, à longueurs entières et avec deux longueurs distinctes en commun. Conclure : a-t-on obtenu quelques exemples ou toutes les solutions ?
- B4) Quel est le choix qui rend le plus petit côté a aussi petit que possible ? Justifier à la fois qu'il convient et qu'aucun choix plus petit n'est possible.

C. Ajouter une borne, puis changer une hypothèse

- C1) On impose en plus que le plus grand côté du second triangle mesure au plus 100 cm. Trouver toutes les paires de triangles possibles et donner leurs six longueurs dans un tableau. Justifier où s'arrête la liste.
- C2) On revient à des longueurs positives quelconques, mais on remplace le rapport $3/2$ par 2. Deux triangles semblables non égaux peuvent-ils alors avoir deux longueurs distinctes de côtés en commun ? Reprendre A3, puis vérifier l'inégalité triangulaire. Une suite de nombres proportionnels suffit-elle à former des triangles ?

À retenir

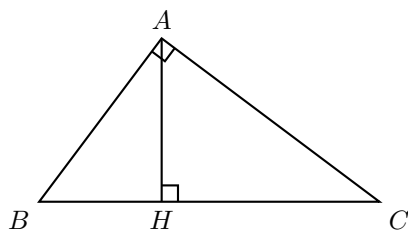
Pour décrire toutes les solutions, on montre d'abord la forme que toute solution doit avoir, puis on vérifie que chaque objet de cette forme convient. Les contraintes arithmétiques ne remplacent pas la condition géométrique : les longueurs doivent réellement former des triangles.

7.8. Relations dans le triangle rectangle : Pythagore redémontré 🏰

★★★★

Cet exercice réinvestit la caractérisation angulaire du cours : le théorème de Pythagore y est démontré, non utilisé.

ABC est un triangle rectangle en A , et H est le pied de la hauteur issue de A : $H \in [BC]$ et $(AH) \perp (BC)$.



- Démontrer que les triangles ABC et HBA sont semblables, et justifier soigneusement l'appariement $\frac{BC}{BA} = \frac{CA}{AH} = \frac{AB}{HB}$ (quels angles se correspondent ?).
- En déduire que $AH = \frac{AB \times AC}{BC}$, puis que $AB^2 = BH \times BC$ (théorème d'Euclide).
- Démontrer de même que les triangles ABC et HAC sont semblables, et en déduire que $AC^2 = CH \times CB$.
- À l'aide des rapports de a) et de c), établir $AH = HB \times \frac{CA}{AB}$ puis $AH = CH \times \frac{AB}{CA}$, et en déduire que $AH^2 = HB \times HC$ (relation de la hauteur, dite « de Descartes »).
- En additionnant les deux égalités d'Euclide (questions b et c), démontrer que $AB^2 + AC^2 = BC^2$: c'est le théorème de Pythagore.
- Contrôle numérique. Dans le triangle $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$: calculer AH , BH et CH avec les formules, puis vérifier les relations de b), c) et d), et vérifier que $BH + CH = BC$.

7.8. Enrichissement facultatif 🏰

Construire une racine carrée avec un demi-cercle

À traiter après avoir établi la relation $AH^2 = BH \times HC$ de l'exercice 7.8. On va la lire dans l'autre sens : choisir BH et HC pour fabriquer une longueur AH dont on connaît le carré.

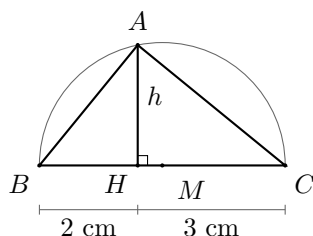
Notions utiles avant de commencer

Pour $u > 0$, $\sqrt{u}$ est le nombre positif dont le carré vaut u . Exemple : $\sqrt{9} = 3$, car $3^2 = 9$. Si une longueur positive x , mesurée en centimètres, vérifie $x^2 = 6$, on sait donc qu'elle vaut exactement $\sqrt{6}$ cm, même sans disposer d'une écriture décimale exacte.

On utilise la propriété du cercle : si A appartient à un cercle de diamètre $[BC]$, avec $A \neq B, C$, alors ABC est rectangle en A . Construire un point sur ce cercle permet donc d'obtenir l'angle droit nécessaire à la relation de la hauteur.

Une construction exacte est justifiée par les propriétés des objets : milieu, cercle, perpendicularité, égalités de longueurs. Le tracé matériel a la précision des instruments ; sa mesure seule ne constitue pas la preuve. Dans les calculs, les lettres minuscules p, q, h désigneront les valeurs numériques des longueurs en centimètres.

A. Fabriquer une longueur dont le carré vaut 6



- Réaliser cette construction : tracer un segment $[BC]$ de longueur 5 cm ; placer $H \in [BC]$ avec $BH = 2$ cm ; placer le milieu M de $[BC]$; tracer le demi-cercle de centre M , au-dessus de (BC) ; la perpendiculaire à (BC) en H rencontre ce demi-cercle en A . Quel rayon utiliser ? Combien mesure HC ?
- Justifier que ABC est rectangle en A , puis que $AH^2 = 6 \text{ cm}^2$. En déduire la valeur exacte de AH et vérifier qu'elle est strictement comprise entre 2 et 3 cm.
- Une mesure donne environ 2,45 cm. Calculer $2,45^2$: cette valeur décimale est-elle la longueur exacte ? Quelle étape de la construction prouve la valeur exacte sans dépendre de la graduation d'une règle ?

B. Comprendre la machine géométrique

- B1) Reprendre la construction avec $BH = p$ cm et $HC = q$ cm, où $p, q > 0$. Donner BC , le rayon du demi-cercle, puis la longueur AH en fonction de p et q . Expliquer pourquoi la justification fonctionne pour tous ces choix.
- B2) Pour obtenir encore $AH = \sqrt{6}$ cm, on choisit maintenant $BH = 1$ cm et $HC = 6$ cm. Justifier ce résultat. Les deux grands triangles ainsi construits, avec des hypoténuses de 5 et 7 cm, sont-ils semblables ? Utiliser le fait qu'une similitude multiplie aussi les hauteurs par son rapport.

C. Choisir les données, puis chercher le maximum

- C1) Construire un segment de longueur $\sqrt{7}$ cm par ce procédé. Choisir les deux longueurs sur le diamètre, donner le rayon à utiliser et justifier le résultat. Un seul choix qui convient est demandé.
- C2) On fixe désormais $BC = 10$ cm, mais on laisse H se déplacer strictement entre B et C . Quelle est la plus grande hauteur AH possible et où faut-il placer H ? Indice : noter M le centre du demi-cercle. Traiter $H = M$ directement, puis comparer AH au rayon AM lorsque $H \neq M$, avec Pythagore dans AHM .

À retenir

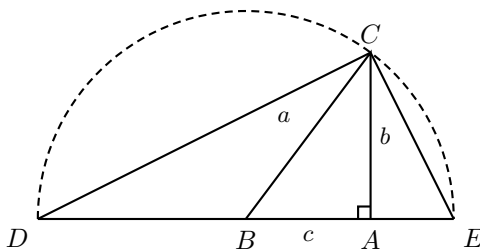
Une formule géométrique sert aussi à concevoir une construction. Le demi-cercle garantit l'angle droit ; les triangles semblables relient le carré de la hauteur au produit des deux segments du diamètre. Choisir les données, construire et prouver sont trois étapes distinctes.

7.9. Défi : Pythagore par le cercle

★★★★

Il existe des centaines de démonstrations du théorème de Pythagore. En voici une qui utilise un cercle et des triangles semblables : trois questions suffisent.

ABC est un triangle rectangle en A . On pose $AB = c$, $AC = b$ et $BC = a$. Le cercle de centre B passant par C coupe la droite (AB) en deux points : E du côté de A , et D de l'autre côté, les points sont alors dans l'ordre D, B, A, E .



- a) Justifier que $AE = a - c$ et que $AD = a + c$. (Au passage : pourquoi est-on sûr que $c < a$?)
- b) Démontrer que le triangle DEC est rectangle en C . (Rappel de 4^e : si un triangle est inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre, alors il est rectangle.)
- c) Démontrer que les triangles CAE et DAC sont semblables, en déduire que $\frac{a-c}{b} = \frac{b}{a+c}$, puis que $a^2 = b^2 + c^2$.

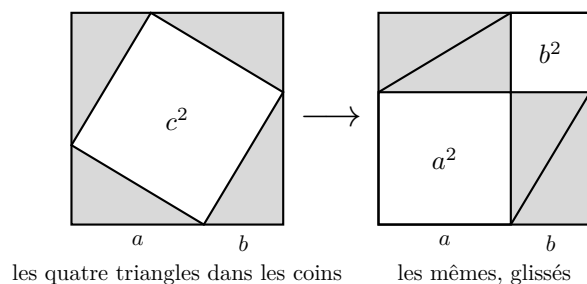
Pour les curieux : trois autres démonstrations « par triangles semblables » existent sur le même principe : l'une avec le cercle de centre B passant par A , une autre qui recolle trois triangles semblables en un rectangle, et une troisième avec une bissectrice. De quoi nourrir un exposé.

7.10. Deux preuves de Pythagore : laquelle éclaire ?

★★★★

(Pythagore est un acquis de 4^e : ici on ne (re)découvre pas le théorème, on compare deux façons de le prouver. À faire après 7.8.)

Voici une seconde démonstration du théorème de Pythagore, « par découpage ». On prend un grand carré de côté $a + b$ et quatre copies d'un même triangle rectangle, dont les côtés de l'angle droit mesurent a et b , et l'hypoténuse c .



- Sur la figure de gauche, justifier que la région blanche centrale a ses quatre côtés égaux à c (ce sont des hypoténuses) et ses quatre angles droits. (Indication : à chaque sommet, les deux angles aigus d'un triangle rectangle sont complémentaires, donc de somme 90° .) En déduire que son aire vaut c^2 .
- Sur la figure de droite, les quatre mêmes triangles ont été glissés. Justifier que les deux régions blanches sont deux carrés, d'aires a^2 et b^2 .
- Dans les deux cas, on a le même grand carré et les mêmes quatre triangles : la surface blanche restante a donc la même aire des deux côtés. En déduire que $c^2 = a^2 + b^2$.
- Découper le puzzle dans du papier (un grand carré et quatre triangles rectangles identiques) et retrouver « avec les mains » le passage d'une figure à l'autre.
- Comparer deux preuves. En 7.8, on a démontré Pythagore autrement, par les triangles semblables. Des deux démonstrations, laquelle convainc le plus vite ? Laquelle fait le mieux voir pourquoi le théorème est vrai ? Rédiger son avis en quelques lignes, avec un argument.

Fin du TD : Corrigés détaillés dans le document « Correction de la feuille d'exercices ».