

Chapitre 01A : Triangles semblables

Agrandissements et réductions



Point de départ

En 4^e, tu as appris à reconnaître des triangles égaux : mêmes longueurs, mêmes angles, deux triangles superposables. Ce chapitre franchit le pas suivant : comparer des triangles qui ont la même forme sans avoir la même taille. Une photo et son agrandissement, une carte et le terrain, une maquette et l'avion réel : partout, la même question, qu'est-ce qui est conservé, qu'est-ce qui est multiplié ?

- On y gagne un outil de démonstration puissant : deux paires d'angles de même mesure suffisent à garantir que deux triangles ont la même forme, et donc que leurs côtés sont proportionnels.
- On y gagne un outil de calcul : les longueurs inaccessibles d'un triangle se déduisent de celles d'un triangle mesurable.
- On y gagne un réflexe de bon sens : dans un agrandissement ou une réduction de rapport k , les longueurs sont multipliées par k , mais les aires par k^2 et les volumes par k^3 .

Ce chapitre est un pilier de l'année : l'exercice « triangles semblables » est un grand classique de 3^e, le théorème de Thalès (chapitre 01C) apparaîtra comme un cas particulier de ce qu'on démontre ici, et la trigonométrie (chapitre 08) repose sur cette idée de forme conservée.

Automatismes

À faire mentalement, sans poser de calcul, puis à refaire de mémoire ; les réponses retournées ci-dessous servent à se corriger. Les questions 1 à 4 réactivent les chapitres précédents.

1. Simplifier $\frac{3,5}{2,1}$.

2. Calculer $\frac{2}{3} \times \frac{9}{4}$.

3. Calculer $\left(\frac{5}{6}\right)^2$ et $\left(\frac{1}{10}\right)^3$.

4. Décomposer 225 en produit de facteurs premiers.

5. Deux angles d'un triangle mesurent 54° et 81° . Le troisième ?

6. Un triangle rectangle a un angle de 25° . Ses deux autres angles ?

7. Citer les trois cas d'égalité des triangles (4^e).

8. Calculer $8^2 + 15^2$ et 17^2 . Que dire d'un triangle de côtés 8, 15, 17 ?

9. Sur un plan à l'échelle $\frac{1}{250}$, que représente 1 cm ?

10. Un rectangle 3×5 : on double les deux dimensions. Nouvelle aire ?

Réponses (pour se corriger seul) : 1) $\frac{5}{3}$ 2) $\frac{3}{2}$ 3) $\frac{25}{36}$ et $\frac{1}{1000}$ 4) $3^2 \times 5^2$ 5) 45° 6) 90° et 65° 7) trois côtés ; un angle compris entre deux côtés ; un côté compris entre deux angles 8) $64 + 225 = 289 = 17^2$: rectangle (réciproque de Pythagore) 9) 250 cm, soit 2,5 m 10) $6 \times 10 = 60$, soit 4 fois l'aire initiale.

1 Triangles égaux, angles et parallèles : réactivation

Avant de comparer des triangles de tailles différentes, on remet au clair la comparaison la plus exigeante : l'égalité.

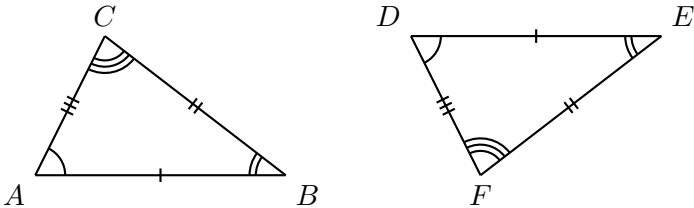
1.1 Triangles égaux

Triangles égaux

Deux triangles sont égaux (on dit aussi superposables ou isométriques) lorsqu'on peut les faire coïncider exactement, quitte à glisser, tourner ou retourner l'un d'eux.

Deux triangles égaux ont leurs côtés deux à deux de même longueur et leurs angles deux à deux de même mesure. Les sommets qui coïncident sont dits homologues.

En clair : deux triangles égaux sont deux exemplaires du même triangle, éventuellement déplacés ou retournés ; rien ne les distingue une fois posés l'un sur l'autre.



Deux triangles égaux dans des positions différentes : $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ et $C \leftrightarrow F$.

En 5^e (chapitre Construction de triangles), tu as constaté qu'il n'est pas nécessaire de connaître les six mesures d'un triangle, c'est-à-dire les longueurs de ses trois côtés et les mesures de ses trois angles, pour le construire : trois données bien choisies suffisent. C'est exactement ce que disent les cas d'égalité, vus en 4^e :

Les trois cas d'égalité des triangles (4^e)

Deux triangles sont égaux dès que l'une des trois conditions suivantes est vérifiée :

Cas 1 « côté-côté-côté »	Cas 2 « côté-angle-côté »	Cas 3 « angle-côté-angle »
leurs trois côtés sont deux à deux de même longueur	un angle de même mesure compris entre deux côtés deux à deux de même longueur	un côté de même longueur compris entre deux angles deux à deux de même mesure

▲ Attention

Dans le cas 2, l'angle doit être compris entre les deux côtés. Avec un angle non compris (deux côtés et un angle « mal placé »), on peut parfois construire deux triangles différents : la donnée ne suffit pas. C'est le contre-exemple à garder en tête.

Pourquoi en a-t-on besoin ici ?

Les cas d'égalité servent à démontrer la caractérisation angulaire de la partie 2. On utilise le cas « angle-côté-angle » : pour comparer deux triangles de tailles différentes, on construit un triangle intermédiaire égal au petit, posé dans le grand.

1.2 Angles et parallèles (5^e)

Angles opposés par le sommet, angles correspondants, angles alternes-internes

Deux angles opposés par le sommet ont le même sommet et leurs côtés sont dans le prolongement l'un de l'autre, deux à deux. Ils n'ont aucun côté commun. Sur la figure : $\widehat{VAM}$ et $\widehat{UAB}$.

Une droite est une sécante à deux droites si elle les coupe en deux points distincts, un point sur chacune des deux droites. Ici, (MN) coupe (UV) en A et (RS) en B .

Deux angles sont correspondants lorsqu'ils sont :

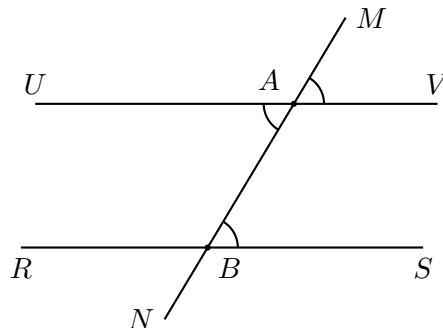
- de sommets différents, A et B ;
- du même côté de la sécante ;
- l'un à l'intérieur des deux droites, l'autre à l'extérieur.

Sur la figure : $\widehat{VAM}$ et $\widehat{SBA}$.

Deux angles sont alternes-internes lorsqu'ils sont :

- de sommets différents, A et B ;
- de part et d'autre de la sécante (« alternes ») ;
- entre les deux droites (« internes »).

Sur la figure : $\widehat{UAB}$ et $\widehat{SBA}$.



Ici, $(UV) \parallel (RS)$; la sécante est (MN) .

Ces définitions n'exigent pas que les deux droites soient parallèles : la position des angles permet de les nommer, mais ne suffit pas à affirmer que leurs mesures sont égales.

On lit $(UV) \parallel (RS)$ « la droite UV est parallèle à la droite RS ». En clair : ces deux droites ne se coupent pas, elles ont la même direction, comme deux lignes d'un cahier.

Angles de même mesure

- Deux angles opposés par le sommet ont la même mesure.
- Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles correspondants qu'elles forment ont la même mesure, et les angles alternes-internes aussi.

Pourquoi c'est vrai ?

Les points U, A, V sont alignés dans cet ordre, ainsi que M, A, B : $\widehat{VAM} + \widehat{MAU} = 180^\circ$ et $\widehat{MAU} + \widehat{UAB} = 180^\circ$. Donc $\widehat{VAM} = 180^\circ - \widehat{MAU} = \widehat{UAB}$: les angles opposés par le sommet ont la même mesure. Pour les parallèles, l'idée est la suivante : on fait glisser la droite (UV) le long de la sécante jusqu'en B : comme elle est parallèle à (RS) , elle garde sa direction et vient se poser sur (RS) , et l'angle $\widehat{VAM}$ vient exactement sur $\widehat{SBA}$. Enfin, $\widehat{UAB} = \widehat{VAM}$ (opposés par le sommet) et $\widehat{VAM} = \widehat{SBA}$ (correspondants), donc $\widehat{UAB} = \widehat{SBA}$. ■

1.3 Rédiger une démonstration

Démonstration

Une démonstration part de faits connus, les hypothèses (données de l'énoncé, résultats déjà démontrés), et en déduit une conclusion, sans rien supposer d'autre. Chaque pas s'écrit en trois temps :

- « On sait que ... » : les hypothèses utiles ;
- « Or ... » : la propriété, la définition ou la règle qui s'applique, citée en toutes lettres ;
- « Donc ... » : ce qu'elle donne sur la figure.

La conclusion d'un pas peut servir d'hypothèse au pas suivant.

On lit ■ « fin de la démonstration ». En clair : le carré noir, placé après la dernière phrase, signale que le résultat annoncé est établi.

Modèle de rédaction J1 : démontrer une propriété (on sait que, or, donc)

Les étapes

- ① On sait que : écrire les hypothèses utiles, tirées de l'énoncé ou d'une question précédente.
- ② Or : citer en toutes lettres la propriété, la définition ou la règle de calcul qui s'applique.
- ③ Donc : écrire ce qu'elle donne sur la figure.
- ④ Enchaîner si besoin : la conclusion obtenue devient une donnée ; recommencer jusqu'au résultat demandé, puis finir par ■.

Ici, un seul pas mène au résultat : la copie se termine par ■ dès l'étape ③.

Une fois les triangles égaux, on peut affirmer sans mesurer que $BC = EF$, $AC = DF$ et $\widehat{ACB} = \widehat{DFE}$.

Sur la copie

Les triangles ABC et DEF vérifient $AB = DE = 5$ cm, $\widehat{BAC} = \widehat{EDF} = 40^\circ$ et $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} = 75^\circ$. Démontrer que ces triangles sont égaux.

① On sait que $\widehat{BAC} = \widehat{EDF} = 40^\circ$, que $AB = DE = 5$ cm et que $\widehat{ABC} = \widehat{DEF} = 75^\circ$.

Le côté $[AB]$ est compris entre les angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$, et le côté $[DE]$ entre les angles $\widehat{EDF}$ et $\widehat{DEF}$.

② Or, si deux triangles ont un côté de même longueur compris entre deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont égaux (cas « angle-côté-angle »).

③ Donc les triangles ABC et DEF sont égaux. ■

→ Au TD : exercice 5.4 a) 🧑🏫 facultatif (modèle J1)

Modèle de rédaction D1 : démontrer que deux angles ont la même mesure (droites parallèles)

Les étapes

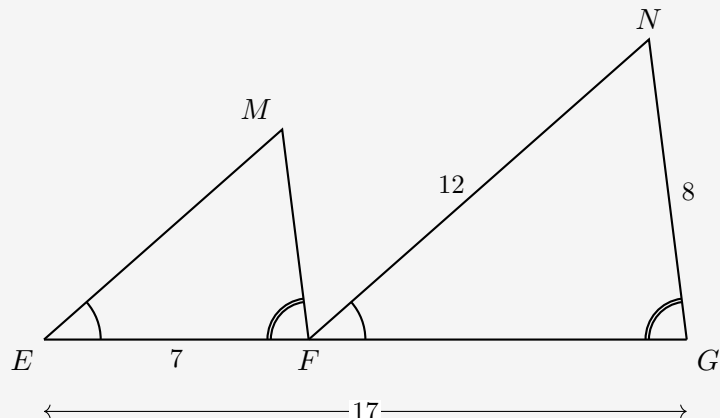
- ① On sait que : citer les deux droites parallèles et la sécante qui les coupe, avec les deux points d'intersection ; dire si les deux angles sont correspondants ou alternes-internes.
- ② Or : citer la propriété : si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles correspondants (ou alternes-internes) qu'elles forment ont la même mesure.
- ③ Donc : écrire l'égalité de leurs mesures.

Avec des angles alternes-internes, la rédaction est la même : on remplace le mot « correspondants » par « alternes-internes ».

Cet exemple sert de fil rouge : la question 2 se rédige avec le modèle D2 (section 2.2), la question 3 avec le modèle L1 (section 3.1).

Sur la copie

Les points E, F, G sont alignés dans cet ordre ; les triangles EFM et FGN sont du même côté de la droite (EG) ; $(EM) \parallel (FN)$ et $(FM) \parallel (GN)$; $EF = 7$, $EG = 17$, $FN = 12$ et $GN = 8$.



1. Démontrer que les angles $\widehat{FEM}$ et $\widehat{GFN}$ ont la même mesure.
2. Démontrer que les triangles EFM et FGN sont semblables.
3. En déduire les longueurs EM et FM .

1. ① On sait que les droites (EM) et (FN) sont parallèles, et que la droite (EG) les coupe en E et en F ; les angles $\widehat{FEM}$ et $\widehat{GFN}$ sont correspondants.

② Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles correspondants qu'elles forment ont la même mesure.

③ Donc $\widehat{FEM} = \widehat{GFN}$. ■

→ Au TD : exercices 2.2 a) et 6.1 a) (modèle D1)

1.4 Triangle isocèle, triangles emboîtés, triangle rectangle

Les angles d'un triangle isocèle

Un triangle isocèle a deux côtés de même longueur ; leur sommet commun est le sommet principal, et le troisième côté est la base. Les deux angles dont le sommet est sur la base sont les angles à la base ; le troisième est l'angle au sommet principal.

- Si un triangle est isocèle, alors ses deux angles à la base ont la même mesure.
- Réciproquement, si un triangle a deux angles de même mesure, alors il est isocèle, et ses deux côtés de même longueur partent du troisième sommet.

En clair : un triangle isocèle est symétrique par rapport à la médiatrice de sa base, et cette symétrie échange les deux angles à la base.

Proportionnalité dans les triangles emboîtés (théorème de Thalès, 4^e)

Dans un triangle ABC , si $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$, alors $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.

Ce théorème sera repris et étendu au chapitre 01C ; dans ce chapitre, il n'intervient qu'au cœur des démonstrations de la partie 2.

Réciproque du théorème de Pythagore

Dans un triangle rectangle, le côté opposé à l'angle droit est l'hypoténuse ; c'est le plus grand côté.

Si, dans un triangle, le carré du plus grand côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle, et l'angle droit est en face du plus grand côté.

On lit $BC^2 \llcorner BC$ au carré ». En clair : c'est $BC \times BC$, le carré de la longueur BC ; si $BC = 13$, alors $BC^2 = 169$.

Pourquoi c'est vrai ?

Soit ABC un triangle dont le plus grand côté est $[BC]$, avec $BC^2 = AB^2 + AC^2$. On construit un triangle $A'B'C'$ rectangle en A' , avec $A'B' = AB$ et $A'C' = AC$. D'après le théorème de Pythagore, $B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2 = AB^2 + AC^2 = BC^2$, donc $B'C' = BC$. Les triangles ABC et $A'B'C'$ ont leurs trois côtés deux à deux de même longueur : ils sont égaux (cas « côté-côté-côté »), et l'angle $\widehat{BAC}$ est droit comme $\widehat{B'A'C'}$. ■

Sur une copie, on calcule les deux membres séparément : on ne sait pas encore s'ils sont égaux, et écrire l'égalité d'emblée, ce serait supposer ce que l'on veut démontrer.

Modèle de rédaction J2 : démontrer qu'un triangle est rectangle (réciproque du théorème de Pythagore)

Les étapes	Sur la copie
① Repérer le plus grand côté.	Le triangle PQR vérifie $PQ = 20$, $QR = 21$ et $PR = 29$. Démontrer que ce triangle est rectangle.
② Calculer séparément le carré du plus grand côté et la somme des carrés des deux autres côtés.	① Dans le triangle PQR , le plus grand côté est $[PR]$.
③ Comparer ; s'ils sont égaux, conclure avec la réciproque du théorème de Pythagore : le triangle est rectangle, et l'angle droit est en face du plus grand côté.	② D'une part, $PR^2 = 29^2 = 841$. D'autre part, $PQ^2 + QR^2 = 20^2 + 21^2 = 400 + 441 = 841$.
	③ Ainsi $PR^2 = PQ^2 + QR^2$. Or, si le carré du plus grand côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle, et l'angle droit est en face du plus grand côté (réciproque du théorème de Pythagore). Donc le triangle PQR est rectangle en Q . ■

→ Au TD : exercices 2.4 a) et 4.1 d) (modèle J2)

Questions flash (sans aide)

1. Deux triangles ont leurs trois angles deux à deux de même mesure. Sont-ils forcément égaux ?

2. ABC et RST vérifient $AB = RS$, $AC = RT$ et $\widehat{BAC} = \widehat{SRT}$. Sont-ils égaux ? Citer le cas utilisé.

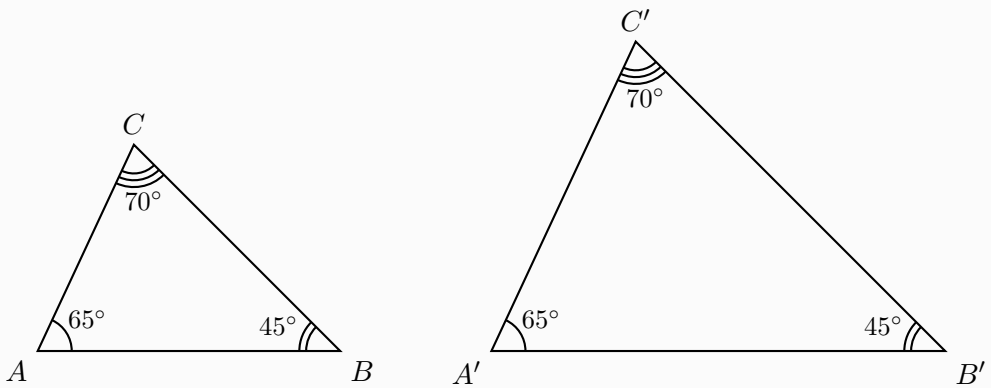
3. Dans les triangles ABC et DEF , on sait que $AB = DE$ et $\widehat{A} = \widehat{D}$. Quelle donnée manque-t-il pour conclure qu'ils sont égaux ?

Réponses : 1) non, même forme, mais tailles éventuellement différentes (c'est tout l'objet de la partie 2) ; 2) oui, cas « côté-angle-côté » (l'angle $\widehat{A}$ est compris entre $[AB]$ et $[AC]$) ; 3) il manque une troisième donnée, par exemple $\widehat{B} = \widehat{E}$ (cas « angle-côté-angle ») ou $AC = DF$ (cas « côté-angle-côté »).

2 Triangles semblables

Activité d'introduction : la même forme, pas la même taille

Voici deux triangles dont les angles sont deux à deux de même mesure : 65°, 45° et 70°.



1. Mesurer à la règle, au millimètre près, les six côtés, puis recopier et compléter le tableau :

	côté face à 70°	côté face à 65°	côté face à 45°
triangle ABC	$AB = \dots$	$BC = \dots$	$AC = \dots$
triangle $A'B'C'$	$A'B' = \dots$	$B'C' = \dots$	$A'C' = \dots$
quotient	$\frac{A'B'}{AB} = \dots$	$\frac{B'C'}{BC} = \dots$	$\frac{A'C'}{AC} = \dots$

2. Une conjecture est une affirmation que l'on pense vraie à partir d'observations ou de mesures, mais que l'on n'a pas encore démontrée. Que constates-tu sur les trois quotients ? Formuler une conjecture commençant par : « Si deux triangles ont leurs angles deux à deux de même mesure, alors... ».

3. Question de retour : pourquoi a-t-on comparé les côtés face aux angles de même mesure, et pas les côtés au hasard ?

La conjecture sera énoncée, puis démontrée, dans la suite de cette section : trois mesures ne prouvent rien !

2.1 Définition et vocabulaire

Triangles semblables

Deux triangles sont semblables lorsqu'on peut faire correspondre leurs sommets deux à deux de façon que les longueurs des côtés qui se correspondent soient proportionnelles.

Le coefficient de proportionnalité k qui fait passer des côtés du premier aux côtés du second s'appelle le rapport de similitude. C'est un nombre strictement positif : $k > 0$.

Les sommets qui se correspondent sont dits homologues, ainsi que les côtés qui les joignent.

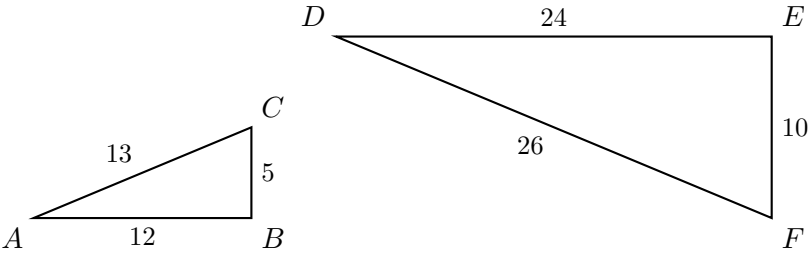
On lit $\frac{A'B'}{AB} = k$: « A prime B prime sur $A B$ égale k ». En clair : la longueur $A'B'$ vaut k fois la longueur AB , et il en va de même pour chacune des deux autres paires de côtés homologues. Le nombre k dépend du sens choisi : de ABC vers $A'B'C'$, il vaut $\frac{A'B'}{AB}$; dans l'autre sens, il vaut $\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{k}$. Si $k > 1$, le second triangle est un agrandissement du premier ; si $0 < k < 1$, une réduction ; si $k = 1$, ils sont égaux (ces mots sont définis pour toutes les figures dans la partie 4).

Exemple

Un triangle ABC de côtés 5 cm, 12 cm, 13 cm et un triangle DEF de côtés 10 cm, 24 cm, 26 cm sont semblables :

$$\frac{10}{5} = \frac{24}{12} = \frac{26}{13} = 2.$$

Le rapport de similitude (du premier vers le second) est $k = 2$; dans l'autre sens, il vaut $\frac{1}{2}$.



Remarque : sur la figure, le second triangle est retourné « en miroir » ; l'orientation n'a aucune importance, seules comptent les longueurs.

Contre-exemple à commenter

Un triangle de côtés 5, 12, 13 et un triangle de côtés 7, 14, 15 ne sont pas semblables, même si l'on a ajouté 2 à chaque côté :

$$\frac{7}{5} = 1,4 \quad \frac{14}{12} \approx 1,17 \quad \frac{15}{13} \approx 1,15.$$

Les trois quotients ne sont pas égaux : il n'y a pas de proportionnalité. Il faut vérifier les trois rapports, pas seulement un ou deux.

Remarque

- Deux triangles égaux sont semblables, avec $k = 1$. La similitude est donc une notion plus large que l'égalité.
- Notation. Quand on écrit « les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables », l'ordre des lettres indique la correspondance : $A \leftrightarrow A'$, $B \leftrightarrow B'$, $C \leftrightarrow C'$ (on lit « A correspond à A prime »), et les côtés homologues se lisent dans l'ordre : $[AB] \leftrightarrow [A'B']$, etc. On abrège parfois cette phrase par $ABC \sim A'B'C'$, qui se lit « le triangle ABC est semblable au triangle $A'B'C'$ » : le symbole $\sim$ ne dispense jamais d'écrire les sommets dans l'ordre des correspondances.
- En pratique, le tableau de proportionnalité des côtés homologues est l'outil de travail :

côtés de ABC	AB	AC	BC
côtés de $A'B'C'$	$A'B'$	$A'C'$	$B'C'$

Pourquoi k se calcule-t-il « arrivée divisée par départ », dans la même unité ?

D'après la définition, chaque côté du second triangle vaut k fois son homologue dans le premier : $A'B' = k \times AB$. En divisant les deux membres par AB , qui n'est pas nul, on obtient $k = \frac{A'B'}{AB}$: la longueur d'arrivée divisée par la longueur homologue de départ. Ce quotient compare deux longueurs ; il n'a de sens que si elles sont écrites dans la même unité. Avec 14 cm et 10 cm, on trouve $\frac{14}{10} = 1,4$; avec 14 cm et 0,1 m (la même longueur de 10 cm), le quotient $\frac{14}{0,1} = 140$ serait faux.

Modèle de rédaction A1 : calculer un rapport k (similitude, agrandissement, réduction) ou une échelle

Les étapes

- 1 Choisir deux longueurs homologues connues et les écrire dans la même unité.
- 2 Diviser la longueur d'arrivée par la longueur homologue de départ : c'est k ; simplifier.
- 3 Conclure : si $k > 1$, c'est un agrandissement ; si $0 < k < 1$, une réduction ; pour un plan ou une carte, l'échelle s'écrit $\frac{1}{n}$.
Le même modèle sert pour une échelle (section 4.1).

Sur la copie

Les triangles ABC et DEF sont semblables, les sommets homologues étant $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ et $C \leftrightarrow F$; $AB = 10$ cm et $DE = 14$ cm. Donner le rapport de similitude de ABC vers DEF .

- 1 Les côtés $[AB]$ et $[DE]$ sont homologues, car ils joignent les sommets homologues $A \leftrightarrow D$ et $B \leftrightarrow E$; ils sont dans la même unité.
- 2 Le rapport de similitude de ABC vers DEF est $k = \frac{DE}{AB} = \frac{14}{10} = 1,4$.
- 3 On a $k > 1$, donc le triangle DEF est un agrandissement du triangle ABC , de rapport $k = 1,4$.

Pourquoi ranger les côtés avant de comparer ?

Multiplier par un nombre $k > 0$ conserve l'ordre : si $a \leq b \leq c$, alors $k \times a \leq k \times b \leq k \times c$. Si les côtés de deux triangles sont proportionnels, le plus petit côté de l'un correspond donc au plus petit côté de l'autre, le moyen au moyen, le grand au grand. Il suffit de tester les côtés rangés : si ces trois rapports ne sont pas égaux, aucune autre façon d'apparier les côtés ne peut donner trois rapports égaux.

Modèle de rédaction R2 : reconnaître des triangles semblables par leurs côtés

Les étapes

- ① Ranger les trois côtés de chaque triangle du plus petit au plus grand en nommant les côtés.
- ② Calculer séparément les trois rapports des côtés de même rang, du premier triangle vers le second : petit avec petit, moyen avec moyen, grand avec grand.
- ③ Écrire l'égalité des trois rapports (ou la non-égalité) et conclure : égaux, les longueurs des côtés sont proportionnelles et les triangles sont semblables, de rapport k ; sinon, ils ne le sont pas.

Le tri ne remplace pas la preuve : il empêche seulement d'apparier au hasard.

Sur la copie

Dans les triangles ABC et DEF , on donne $AB = 14$, $BC = 8$, $AC = 12$ et $DE = 15$, $EF = 17,5$, $DF = 10$. Ces triangles sont-ils semblables ? Justifier par les trois rapports.

- ① Je range les côtés de chaque triangle du plus petit au plus grand : Dans ABC : $BC = 8$; $AC = 12$; $AB = 14$. Dans DEF : $DF = 10$; $DE = 15$; $EF = 17,5$.

- ② Je calcule les trois rapports des côtés de même rang, de ABC vers DEF :

$$\frac{DF}{BC} = \frac{10}{8} = 1,25 \qquad \frac{DE}{AC} = \frac{15}{12} = 1,25 \qquad \frac{EF}{AB} = \frac{17,5}{14} = 1,25$$

- ③ On a $\frac{DF}{BC} = \frac{DE}{AC} = \frac{EF}{AB} = 1,25$: les trois rapports sont égaux, les longueurs des côtés sont proportionnelles, donc les triangles ABC et EFD sont semblables ($A \leftrightarrow E$, $B \leftrightarrow F$, $C \leftrightarrow D$), de rapport $k = 1,25$ de ABC vers EFD (agrandissement).

(Si deux rapports sont différents, on écrit l'inégalité, par exemple $\frac{DF}{BC} \neq \frac{DE}{AC}$, et on conclut que les triangles ne sont pas semblables.)

▲ Attention

Deux rapports égaux ne suffisent pas lorsque l'on utilise la définition par les trois côtés. Par exemple, avec deux triangles de côtés 2, 5, 6 et 6, 15, 17 :

$$\frac{6}{2} = \frac{15}{5} = 3 \quad \text{mais} \quad \frac{17}{6} \neq 3, \quad \text{donc} \quad \frac{6}{2} = \frac{15}{5} \neq \frac{17}{6}.$$

Les triangles ne sont pas semblables. Le troisième rapport n'est pas un contrôle facultatif : il fait partie de la preuve.

→ Au TD : exercice 1.2 (modèle R2)

2.2 La caractérisation angulaire

Théorème (propriété caractéristique des triangles semblables)

Deux triangles sont semblables si, et seulement si, leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Autrement dit :

- si deux triangles ont leurs angles deux à deux de même mesure, alors leurs côtés sont proportionnels ;
- réciproquement, si les côtés de deux triangles sont proportionnels, alors leurs angles sont deux à deux de même mesure.

Les sommets d'angles de même mesure sont homologues ; les côtés opposés à ces angles sont aussi homologues.

On lit « si, et seulement si » : les deux implications ci-dessus sont vraies, et chacune se démontre séparément (ci-dessous). En clair : avoir la même forme, c'est avoir des angles de même mesure ; et avoir des angles de même mesure, c'est avoir des côtés proportionnels.

Une caractérisation est une propriété qui équivaut à la définition : on peut reconnaître l'objet par elle. Ce théorème est la caractérisation angulaire des triangles semblables.

Deux angles suffisent

Si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors les troisièmes angles ont aussi la même mesure, et les triangles sont donc semblables.

Pourquoi deux angles suffisent-ils ?

Outil de démonstration : preuve directe, par un calcul à partir d'une propriété connue (la somme des angles d'un triangle).

Dans tout triangle, la somme des angles vaut 180° (démontré en 5^e, chapitre Angles d'un triangle). Si $\widehat{A} = \widehat{A'}$ et $\widehat{B} = \widehat{B'}$, alors :

$$\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{A'} - \widehat{B'} = \widehat{C'}.$$

■

Pourquoi la caractérisation angulaire est-elle vraie ?

Outil de démonstration : un triangle intermédiaire AMN posé dans ABC , un cas d'égalité (section 1.1) et la proportionnalité dans les triangles emboîtés (section 1.4). Si $A'B' = AB$, un cas d'égalité montre directement que les triangles sont égaux ; si $A'B' > AB$, on échange les rôles des deux triangles ; on suppose donc $A'B' < AB$, on place M sur $[AB]$ avec $AM = A'B'$, et la parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N .

Sens direct (des angles vers les côtés). On suppose $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$ et $\widehat{C} = \widehat{C'}$. L'angle $\widehat{MAN}$ est l'angle $\widehat{BAC}$, car $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$; donc $\widehat{MAN} = \widehat{BAC} = \widehat{A'}$. Comme $(MN) \parallel (BC)$, les angles correspondants donnent $\widehat{AMN} = \widehat{ABC} = \widehat{B'}$. Avec $AM = A'B'$, les triangles AMN et $A'B'C'$ sont égaux (cas « angle-côté-angle »), d'où $AN = A'C'$ et $MN = B'C'$. Les triangles emboîtés donnent alors $\frac{A'B'}{AB} = \frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$, soit $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$: les longueurs des côtés sont proportionnelles.

Sens réciproque (approfondissement, repris à l'exercice 7.5 du TD). On suppose $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC} = k$. Comme $\frac{AM}{AB} = \frac{A'B'}{AB} = k$, la proportionnalité dans les triangles emboîtés donne $\frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC} = k$, d'où $AN = A'C'$ et $MN = B'C'$. Les triangles AMN et $A'B'C'$ sont alors égaux (cas « côté-côté-côté »), donc leurs angles ont deux à deux la même mesure ; or ceux de AMN ont la même mesure que ceux de ABC (angle commun en A et angles correspondants). Donc les angles de $A'B'C'$ ont deux à deux la même mesure que ceux de ABC .

■

Modèle de rédaction R1 : reconnaître des triangles semblables par leurs angles

Les étapes

- ① Calculer le troisième angle de chaque triangle : 180° moins la somme des deux angles connus.
- ② Écrire les trois angles de chaque triangle, du plus petit au plus grand.
- ③ Comparer et conclure avec la caractérisation angulaire : angles deux à deux de même mesure, les triangles sont semblables ; sinon, ils ne le sont pas.

La conclusion « pas semblables » utilise l'autre sens du théorème : deux triangles semblables ont des angles deux à deux de même mesure.

Sur la copie

Triangle n° 1 : deux angles de 38° et 75° . Triangle n° 2 : deux angles de 67° et 38° . Ces triangles sont-ils semblables ?

- ① Dans le triangle n° 1, le troisième angle mesure : $180^\circ - 38^\circ - 75^\circ = 67^\circ$.
Dans le triangle n° 2, le troisième angle mesure : $180^\circ - 67^\circ - 38^\circ = 75^\circ$.

- ② Les angles du triangle n° 1 sont 38° , 67° et 75° ; ceux du triangle n° 2 sont 38° , 67° et 75° .

- ③ Les deux triangles ont des angles deux à deux de même mesure : d'après la caractérisation angulaire, ils sont semblables.

À toi : même modèle

Triangle n° 1 : deux angles de 29° et 113° . Triangle n° 2 : deux angles de 38° et 29° . Ces triangles sont-ils semblables ?

Réponse : dans le triangle n° 1, le troisième angle mesure $180^\circ - 29^\circ - 113^\circ = 38^\circ$ et dans le triangle n° 2, il mesure $180^\circ - 38^\circ - 29^\circ = 113^\circ$; les deux triangles ont les angles 29° , 38° et 113° : d'après la caractérisation angulaire, ils sont semblables.

→ Au TD : exercices 1.1, 3.8 d) et 6.4 a) (modèle R1)

Même forme, lettres dans un autre ordre

On donne :

	A	B	C		D	E	F
triangle ABC	85°	58°	37°	triangle DEF	58°	37°	85°

Les sommets homologues sont ceux des angles de même mesure :

$$A \leftrightarrow F, \quad B \leftrightarrow D, \quad C \leftrightarrow E.$$

Ainsi :

$$[AB] \leftrightarrow [FD], \quad [BC] \leftrightarrow [DE], \quad [CA] \leftrightarrow [EF].$$

Si $AB = 5$ et $FD = 8$, alors le rapport du triangle ABC vers le triangle FDE vaut $k = \frac{FD}{AB} = \frac{8}{5} = 1,6$; on en déduit $DE = 1,6 \times BC$ et $EF = 1,6 \times CA$.

Vérification par l'ordre. Dans chaque triangle, l'angle le plus grand vaut 85° (sommets A et F) : les côtés opposés $[BC]$ et $[DE]$ sont bien associés ensemble.

Pourquoi faut-il tester la place de l'angle donné dans un triangle isocèle ?

Dans un triangle isocèle, les deux angles à la base ont la même mesure (partie 1), mais l'angle au sommet principal peut être différent. Un angle donné peut donc être l'angle au sommet principal ou un angle à la base : ce sont deux triangles différents, et la somme des angles, 180° , fixe les deux autres angles dans chaque cas. Une place est impossible quand la somme des deux angles à la base atteindrait ou dépasserait 180° .

Modèle de rédaction R3 : trouver les angles d'un triangle isocèle dont on connaît un angle

Les étapes

- ① Placer l'angle donné au sommet principal : les deux angles à la base, de même mesure, valent chacun 180° moins cet angle, divisé par 2.
- ② Placer l'angle donné à la base : l'autre angle à la base a la même mesure, et l'angle au sommet principal vaut 180° moins leur somme ; si cette somme atteint ou dépasse 180° , ce cas est impossible.
- ③ Conclure : un seul cas possible, les trois angles sont imposés ; deux cas possibles, deux formes différentes.

Sur la copie

Deux triangles isocèles ont chacun un angle de 70° .

a) Ces triangles sont-ils forcément semblables ?

b) Même question avec un angle de 110° .

a) ① Si l'angle de 70° est l'angle au sommet principal, les deux angles à la base valent chacun $(180^\circ - 70^\circ) \div 2 = 110^\circ \div 2 = 55^\circ$: les angles sont 70° , 55° et 55° .

② Si l'angle de 70° est un angle à la base, l'autre angle à la base mesure aussi 70° , et l'angle au sommet principal vaut $180^\circ - 70^\circ - 70^\circ = 40^\circ$: les angles sont 70° , 70° et 40° .

③ Deux cas sont possibles, avec des angles différents : ces triangles ne sont pas forcément semblables.

b) ① Si l'angle de 110° est l'angle au sommet principal, les deux angles à la base valent chacun $(180^\circ - 110^\circ) \div 2 = 70^\circ \div 2 = 35^\circ$: les angles sont 110° , 35° et 35° .

② Si l'angle de 110° était un angle à la base, l'autre angle à la base mesurerait aussi 110° : ces deux angles auraient déjà une somme de 220° , plus que 180° . Ce cas est impossible.

③ Un seul cas est possible : les angles sont forcément 110° , 35° et 35° . Deux tels triangles ont des angles deux à deux de même mesure : d'après la caractérisation angulaire, ils sont toujours semblables.

→ Au TD : exercices 1.1 e), 1.5 d) et 1.5 e) (modèle R3)

Modèle de rédaction D2 : démontrer que deux triangles sont semblables (deux paires d'angles)

Les étapes

- ① On sait que : écrire une première paire d'angles de même mesure, avec sa justification (donnée de l'énoncé, angle commun, angles opposés par le sommet, angles formés par des parallèles, angles droits, question précédente).
- ② On sait de même que : écrire une seconde paire d'angles de même mesure, avec sa justification.
- ③ Or : citer la propriété : si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

④ Donc : conclure en nommant les deux triangles et les trois paires de sommets homologues (les sommets des angles de même mesure).

C'est la rédaction-type du chapitre. Les phrases de justification sont rangées dans l'encadré qui suit.

La question 1 de cet exemple est rédigée avec le modèle D1 (section 1.3).

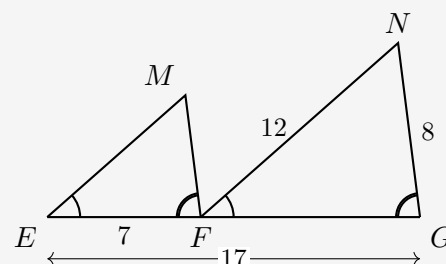
Sur la copie

Les points E, F, G sont alignés dans cet ordre ; $(EM) \parallel (FN)$ et $(FM) \parallel (GN)$.

1. Démontrer que

$$\widehat{FEM} = \widehat{GFN}.$$

2. Démontrer que les triangles EFM et FGN sont semblables.



2. ① On sait que $\widehat{FEM} = \widehat{GFN}$, d'après la question 1.

② On sait de même que $\widehat{EFM} = \widehat{FGN}$, car ce sont des angles correspondants formés par les parallèles (FM) et (GN) avec la sécante (EG) .

③ Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

④ Donc les triangles EFM et FGN sont semblables, les sommets homologues étant $E \leftrightarrow F, F \leftrightarrow G$ et $M \leftrightarrow N$. ■

Justifier une paire d'angles de même mesure : une phrase par source

Dans une paire, l'angle du premier triangle nommé dans l'énoncé s'écrit à gauche du signe $=$.

- Donnée de l'énoncé : « On sait de même que $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$, car c'est une donnée de l'énoncé. »
- Angle commun : « L'angle en A est commun aux triangles ADE et ACB (avec $D \in [AB]$ et $E \in [AC]$), donc $\widehat{DAE} = \widehat{CAB}$. » (Sur des demi-droites : « avec $A' \in [CA]$ et $B' \in [CB]$ ».)
- Angles opposés par le sommet : « Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont opposés par le sommet (avec les droites (AC') et (BD) sécantes en O), donc $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$. »
- Angles formés par des parallèles : « On sait de même que $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$, car ce sont des angles alternes-internes formés par les parallèles (AB) et (CD) avec la sécante (AC) . » (ou « correspondants », selon leur position)
- Angles droits (configuration des hauteurs, partie 3.3) : « On sait de même que $\widehat{ABE} = \widehat{DCE} = 90^\circ$, car ces deux angles sont droits : $(AB) \perp (BD)$ et $(CD) \perp (AC)$. »

Dans la conclusion, le second triangle est nommé dans l'ordre des correspondances : si D , sur $[AB]$, correspond à C , on écrit « Donc les triangles ADE et ACB sont semblables, les sommets homologues étant $A \leftrightarrow A, D \leftrightarrow C$ et $E \leftrightarrow B$. ■ »

→ Au TD : exercices 1.3, 1.4 a), 2.2 b), 2.3 a) et d), 2.4 c) et d), 3.3 a), 3.4 a), 5.3 a), 6.1 b) et 6.2 a) (modèle D2)

▲ Attention

- Un seul angle de même mesure ne suffit pas. Les triangles d'angles $40^\circ-110^\circ-30^\circ$ et $40^\circ-70^\circ-70^\circ$ ont un angle de 40° en commun et ne sont pas semblables. Il faut deux paires d'angles de même mesure.
- Semblables n'est pas égaux. Deux triangles semblables ont la même forme ; ils n'ont la même taille que si $k = 1$.
- Sur un dessin, « ça a l'air pareil » ne prouve rien : on justifie par les angles ou par les trois rapports, jamais à l'œil.

Contre-exemple

Une affirmation générale dit que quelque chose est vrai pour tous les objets d'un certain type, par exemple « deux triangles isocèles qui ont chacun un angle de 70° sont toujours semblables ». Un contre-exemple est un cas qui vérifie l'hypothèse de l'affirmation sans vérifier sa conclusion : ici, deux triangles isocèles d'angles $70^\circ, 55^\circ, 55^\circ$ et $70^\circ, 70^\circ, 40^\circ$ (modèle R3). Un seul contre-exemple suffit à prouver qu'une affirmation générale est fausse.

Pourquoi des exemples ne suffisent-ils pas pour répondre « vrai » ?

Une affirmation « toujours vraie » porte sur une infinité de triangles : même cent exemples qui la vérifient laissent tous les autres de côté. Pour répondre « vrai », il faut un argument qui vaut pour tous les triangles concernés (une définition, une propriété du cours). Pour répondre « faux », un seul cas qui ne convient pas suffit, à condition de le donner avec des nombres que l'on peut vérifier.

Modèle de rédaction T2 : répondre à un « vrai ou faux »

Les étapes

- ① Annoncer la réponse : vrai ou faux.
- ② Affirmation vraie : la démontrer pour tous les triangles concernés (par la définition, ou en montrant que leurs angles sont imposés, puis par la caractérisation angulaire).
- ③ Affirmation fausse : donner un contre-exemple chiffré, deux triangles qui vérifient l'hypothèse sans vérifier la conclusion.

Sur la copie

Vrai ou faux ? Justifier.

- a) Deux triangles rectangles qui ont chacun un angle de 35° sont toujours semblables.
 b) Deux triangles qui ont chacun un côté de 5 cm sont toujours semblables.

a) ① VRAI.

② Dans un triangle rectangle qui a un angle de 35° , cet angle n'est pas l'angle droit, et le troisième angle vaut $180^\circ - 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$. Deux tels triangles ont donc des angles deux à deux de même mesure, 35° , 55° et 90° : d'après la caractérisation angulaire, ils sont toujours semblables. ■

b) ① FAUX.

③ Contre-exemple : un triangle équilatéral de côté 5 cm, dont les trois angles mesurent 60° , et un triangle rectangle isocèle dont les côtés de l'angle droit mesurent 5 cm, et dont les angles mesurent 90° , 45° et 45° . Ils ont chacun un côté de 5 cm, mais pas des angles de même mesure : ils ne sont pas semblables.

→ Au TD : exercice 1.5 (modèle T2 ; en d) et e), modèle R3)

Questions flash (sans aide)

1. Un triangle a des angles de 52° et 76° ; un autre a des angles de 52° et 52° . Sont-ils semblables ?
2. Deux triangles semblables ont pour rapport de similitude $k = 3$. Que valent les angles du second par rapport au premier ?
3. Les côtés 4 ; 7 ; 9 et 8 ; 14 ; 17 définissent-ils des triangles semblables ?

Réponses : 1) oui ! Le premier a pour troisième angle $180^\circ - 52^\circ - 76^\circ = 52^\circ$, le second $180^\circ - 52^\circ - 52^\circ = 76^\circ$: dans les deux cas, les angles sont 52° , 52° , 76° ; 2) exactement les mêmes, les angles ne changent jamais, seul k agit sur les longueurs : 3) non : $\frac{4}{8} = \frac{7}{14} = \frac{9}{17} = 2$, mais $\frac{9}{17} \neq 2$.

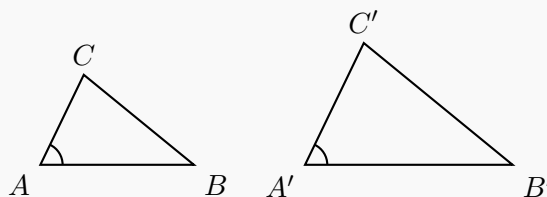
2.3 Un troisième critère : « le CAC de la similitude »

Deux angles suffisent, mais encore faut-il connaître deux angles. Quand l'énoncé ne fournit qu'un angle et des longueurs, le critère suivant prend le relais.

Troisième critère de similitude (admis) : un angle compris entre deux côtés proportionnels

Si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés deux à deux proportionnels, alors ils sont semblables.

Autrement dit : si $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et $\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$, alors les triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables.



Pourquoi ce critère est-il vrai ? (idée de la preuve)

Ce critère est aux triangles semblables ce que le cas d'égalité « côté-angle-côté » (en abrégé « CAC ») est aux triangles égaux : on y remplace « côtés deux à deux de même longueur » par « côtés deux à deux proportionnels ». Comme pour le cas d'égalité, l'angle doit être compris entre les deux côtés.

Sa preuve repose sur un cas d'égalité et sur la proportionnalité dans les triangles emboîtés. Si $A'B' = AB$, alors $\frac{A'C'}{AC} = \frac{A'B'}{AB} = 1$, donc $A'C' = AC$ et le cas « côté-angle-côté » montre directement que les triangles sont égaux ; si $A'B' > AB$, on échange les rôles des deux triangles. Si $A'B' < AB$, on place M sur $[AB]$ avec $AM = A'B'$, et la parallèle à (BC) passant par M coupe $[AC]$ en N . Les triangles emboîtés donnent $\frac{AN}{AC} = \frac{AM}{AB} = \frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC}$, donc $AN = A'C'$. Les triangles AMN et $A'B'C'$ sont alors égaux (cas « côté-angle-côté ») ; or les angles de AMN ont la même mesure que ceux de ABC (angle commun et angles correspondants), donc ceux de $A'B'C'$ aussi : d'après la caractérisation angulaire, ABC et $A'B'C'$ sont semblables.

Modèle de rédaction D3 : démontrer que deux triangles sont semblables (un angle compris entre deux côtés proportionnels)

Les étapes

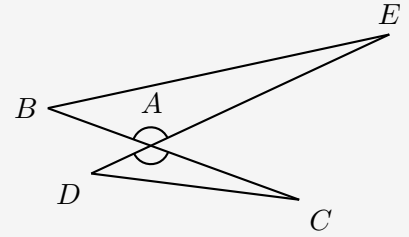
- ① On sait que : écrire la paire d'angles de même mesure, avec sa justification.
- ② Calculer les rapports des deux paires de côtés qui encadrent ces angles, le plus petit avec le plus petit, et constater qu'ils sont égaux.
- ③ Or : citer le troisième critère : si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés deux à deux proportionnels, alors ils sont semblables.

- ④ Donc : conclure en nommant les deux triangles et les trois paires de sommets homologues.

Une seule paire d'angles de même mesure est connue : la caractérisation angulaire ne peut pas conclure seule.

Sur la copie

Les segments $[BC]$ et $[DE]$ se coupent en leur intérieur en A ;
 $AD = 15$ cm, $AB = 25$ cm,
 $AC = 36$ cm et $AE = 60$ cm ;
 aucune droite parallèle n'est donnée.
 Démontrer que les triangles DAC et BAE sont semblables.



- ① Les angles $\widehat{DAC}$ et $\widehat{BAE}$ sont opposés par le sommet (avec les droites (DE) et (BC) sécantes en A), donc $\widehat{DAC} = \widehat{BAE}$.

- ② Les côtés qui encadrent ces angles mesurent $AD = 15$ cm et $AC = 36$ cm dans le triangle DAC , $AB = 25$ cm et $AE = 60$ cm dans le triangle BAE :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{25}{15} = \frac{5}{3} \quad \frac{AE}{AC} = \frac{60}{36} = \frac{5}{3}$$

Les deux rapports sont égaux.

- ③ Or, si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés deux à deux proportionnels, alors ils sont semblables.

- ④ Donc les triangles DAC et BAE sont semblables, les sommets homologues étant $D \leftrightarrow B$, $A \leftrightarrow A$ et $C \leftrightarrow E$. ■

→ Au TD : exercice 2.5 a) (modèle D3)

Questions flash (sans aide)

1. $\widehat{A} = \widehat{A'} = 41^\circ$, $AB = 6$, $AC = 9$, $A'B' = 8$, $A'C' = 12$: les triangles ABC et $A'B'C'$ sont-ils semblables ?
2. Même question avec $A'B' = 8$ et $A'C' = 10$.

Réponses : 1) oui : $\frac{6}{8} = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$; angle de même mesure compris entre côtés proportionnels (CAC de la similitude) ; 2) non : $\frac{6}{8} \neq \frac{9}{10}$ et $\frac{6}{10} \neq \frac{9}{12}$; aucune façon d'apparier les côtés autour des angles de même mesure ne donne des rapports égaux.

3 Calculer avec des triangles semblables

Savoir que deux triangles sont semblables, c'est bien ; s'en servir pour calculer des longueurs, c'est le cœur des exercices du chapitre. Toute la difficulté tient en un mot : apparier.

Triangle de départ, triangle d'arrivée

Pour calculer avec deux triangles semblables, on choisit un sens : le rapport k va du triangle de départ vers le triangle d'arrivée. Chaque longueur du triangle d'arrivée vaut k fois la longueur homologue du triangle de départ : $A'B' = k \times AB$.

Pour revenir vers le triangle de départ, on divise par k : de $A'B' = k \times AB$, on tire $AB = A'B' \div k$.

En clair : avec $k = 3$, un côté de départ de 7 cm donne un côté d'arrivée de $3 \times 7 = 21$ cm, et un côté d'arrivée de 12 cm vient d'un côté de départ de $12 \div 3 = 4$ cm.

3.1 Calculer des longueurs : l'exemple modèle

On reprend l'exemple modèle de la section 1.3. La question 1 (modèle D1) a montré que $\widehat{FEM} = \widehat{GFN}$, la question 2 (modèle D2, section 2.2) que les triangles EFM et FGN sont semblables, avec $E \leftrightarrow F$, $F \leftrightarrow G$ et $M \leftrightarrow N$. Il reste la question 3 : en déduire les longueurs EM et FM .

Pourquoi apparier, poser, puis résoudre ?

Le rapport k n'est le même que pour des côtés homologues : diviser deux côtés qui ne se correspondent pas donne un nombre sans signification. On apparie donc d'abord, par les sommets homologues, jamais « à l'œil » : le dessin peut tromper. Le tableau range chaque côté sous son homologue ; une colonne complète suffit à calculer k , puisque tous les rapports de côtés homologues valent k . On multiplie ensuite par k pour aller vers le triangle d'arrivée, et on divise par k pour revenir vers le triangle de départ. Les deux contrôles de la fin détectent une erreur d'appariement ou de sens : si $k < 1$, chaque côté du triangle d'arrivée doit être plus court que son homologue.

Modèle de rédaction L1 : calculer des longueurs dans deux triangles semblables (apparié, poser, résoudre)

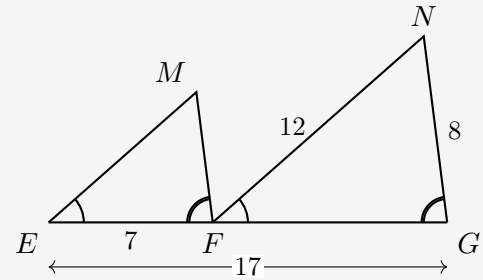
Les étapes

- ① Apparié : écrire les côtés homologues, qui joignent deux sommets homologues (jamais « à l'œil »).
- ② Poser : ranger les côtés homologues dans un tableau, triangle de départ en haut, triangle d'arrivée en bas ; s'il n'y a aucune colonne complète, calculer d'abord la longueur qui manque.
- ③ Résoudre : calculer le rapport k sur une colonne complète : longueur d'arrivée divisée par la longueur homologue de départ.
- ④ Calculer chaque longueur cherchée : multiplier par k pour aller vers le triangle d'arrivée, diviser par k pour revenir vers le triangle de départ.
- ⑤ Vérifier : les rapports des colonnes complètes sont égaux, et le plus petit triangle a les plus petits côtés.

Le triangle de départ est FGN : c'est celui dont on connaît le plus de côtés, une fois FG calculé.

Sur la copie

Les points E, F, G sont alignés dans cet ordre ; les triangles EFM et FGN sont semblables (question 2) ; $EF = 7$, $EG = 17$, $FN = 12$ et $GN = 8$.
3. En déduire les longueurs EM et FM .



3. ① D'après la question 2, $E \leftrightarrow F$, $F \leftrightarrow G$ et $M \leftrightarrow N$: les côtés homologues sont $[EF] \leftrightarrow [FG]$, $[EM] \leftrightarrow [FN]$ et $[FM] \leftrightarrow [GN]$.

② Le point F appartient au segment $[EG]$, donc $FG = EG - EF = 17 - 7 = 10$. Je range les côtés homologues dans un tableau :

côtés de FGN	$FG = 10$	$FN = 12$	$GN = 8$
côtés de EFM	$EF = 7$	$EM = ?$	$FM = ?$

③ Le rapport de similitude de FGN vers EFM est $k = \frac{EF}{FG} = \frac{7}{10} = 0,7$ (réduction).

④ Pour aller vers le triangle EFM , je multiplie par k :

$$EM = 0,7 \times FN = 0,7 \times 12 = \boxed{8,4}$$

$$FM = 0,7 \times GN = 0,7 \times 8 = \boxed{5,6}$$

⑤ Vérification : $\frac{7}{10} = \frac{8,4}{12} = \frac{5,6}{8} = 0,7$: les rapports sont égaux. Le rapport est strictement inférieur à 1, donc chaque côté de EFM doit être strictement plus court que son homologue dans FGN : c'est le cas, $7 < 10$, $8,4 < 12$ et $5,6 < 8$. ✓

Du raisonnement à l'égalité de rapports

On n'écrit l'égalité des rapports qu'après avoir justifié que les triangles sont semblables et apparié les côtés par les angles. Le mot « donc » relie l'argument géométrique à la proportionnalité ; chaque signe = suivant conserve une même valeur. Une mesure issue du dessin s'écrit avec le symbole $\approx$ (« environ égal à ») tant qu'aucun théorème ne garantit l'égalité exacte.

Égalité des produits en croix

Pour des nombres a, b, c, d , avec $b \neq 0$ et $d \neq 0$:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{équivaut à} \quad a \times d = b \times c.$$

On lit « a sur b égale c sur d ». En clair : deux quotients sont égaux exactement quand les produits « en croix » $a \times d$ et $b \times c$ sont égaux ; par exemple, $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$ et $2 \times 15 = 30 = 5 \times 6$.

Pourquoi c'est vrai ?

On multiplie les deux membres de $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ par le même nombre non nul $b \times d$: on obtient $a \times d$ à gauche et $c \times b$ à droite, donc $a \times d = b \times c$. Réciproquement, on divise les deux membres de $a \times d = b \times c$ par $b \times d$. ■

Deux méthodes pour l'étape « résoudre » : laquelle choisir ?

Pour calculer EM dans l'exemple modèle (de FGN vers EFM) :

- Méthode 1 (par le coefficient) : $k = \frac{7}{10} = 0,7$, puis $EM = 0,7 \times 12 = 8,4$. Rapide quand k est un nombre simple.
- Méthode 2 (produit en croix) : dans le tableau, $\frac{EM}{12} = \frac{7}{10}$, donc $10 \times EM = 7 \times 12$ et $EM = \frac{7 \times 12}{10} = 8,4$. Toujours disponible, même quand k est un quotient compliqué.

Les deux méthodes sont valables dans tout tableau de proportionnalité. Sur une copie, on calcule toujours par le coefficient k (étape ④ du modèle L1), qui resservira pour la vérification et pour les aires ; on n'ajoute le produit en croix que si l'énoncé le demande. Toutes deux resserviront au chapitre 01C.

→ Au TD : exercices 1.4 b) et c), 2.1 b) et c), 2.2 c), 2.3, 2.4 c) et d), 5.1 b), 5.3, 6.1 c), 6.2 b), 6.4 b) et c) (modèle L1, après le modèle D2 quand il faut d'abord démontrer la similitude)

Hauteur, médiane

La hauteur issue d'un sommet d'un triangle est la droite qui passe par ce sommet et qui est perpendiculaire au côté opposé ; on appelle aussi hauteur le segment qui joint le sommet au pied de cette perpendiculaire, ainsi que sa longueur. La médiane issue d'un sommet est le segment qui joint ce sommet au milieu du côté opposé ; on appelle aussi médiane sa longueur.

Le rapport k agit sur toutes les longueurs homologues

Si deux triangles sont semblables dans le rapport k , alors :

- leurs côtés homologues sont dans le rapport k ;
- leurs périmètres sont dans le rapport k ;
- leurs hauteurs homologues et leurs médianes homologues sont dans le rapport k .

Autrement dit, toute longueur construite de la même manière dans les deux triangles est multipliée par k .

Même coefficient, plusieurs grandeurs

Un triangle T' est un agrandissement d'un triangle T dans le rapport $k = 1,5$. Le périmètre de T vaut 24 cm, une hauteur mesure 4,4 cm et la médiane issue du même sommet mesure 6,2 cm. Alors :

$$P' = 1,5 \times 24 = 36 \text{ cm}, \quad h' = 1,5 \times 4,4 = 6,6 \text{ cm}, \quad m' = 1,5 \times 6,2 = 9,3 \text{ cm}.$$

Le réflexe est le même dans les trois calculs : ce sont des longueurs, donc elles sont multipliées par k , pas par k^2 .

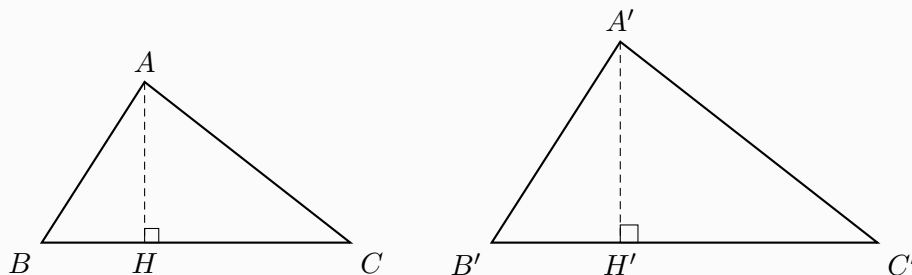
Pourquoi une hauteur est-elle, elle aussi, multipliée par k ?

Outil de démonstration : preuve directe, avec deux cas selon la position du pied de la hauteur.

On suppose ABC et $A'B'C'$ semblables avec

$$A \leftrightarrow A', \quad B \leftrightarrow B', \quad C \leftrightarrow C',$$

et on trace les hauteurs $[AH]$ et $[A'H']$ issues des sommets homologues A et A' .



Si $\widehat{B} = 90^\circ$, alors $H = B$ et $H' = B'$: les hauteurs sont les côtés $[AB]$ et $[A'B']$, donc le rapport de leurs longueurs vaut k . Sinon, les triangles ABH et $A'B'H'$ sont rectangles en H et en H' . Si $\widehat{B}$ est aigu, H appartient à la demi-droite $[BC)$, éventuellement au-delà de C ; les angles en B et B' sont les angles homologues du départ. S'il est obtus, les angles en B et B' des triangles rectangles valent $180^\circ - \widehat{B} = 180^\circ - \widehat{B}'$. Dans les deux cas, les triangles rectangles ont deux angles deux à deux de même mesure : ils sont semblables. Ainsi

$$\frac{A'H'}{AH} = \frac{A'B'}{AB} = k.$$

Pour les médianes $[AM]$ et $[A'M']$, M et M' sont les milieux de $[BC]$ et $[B'C']$. Alors $B'M'/BM = B'C'/BC = k = A'B'/AB$, et les angles compris en B et B' ont la même mesure. Le critère CAC de similitude (section 2.3) donne $ABM \sim A'B'M'$, d'où $A'M'/AM = k$.

Pour les périmètres, le calcul est direct :

$$P' = kAB + kB'C' + kCA = k(AB + BC + CA) = kP.$$

→ Au TD : exercice 2.1 d) (périmètres)

Modèle de rédaction V2 : trouver et corriger l'erreur d'une copie

Les étapes

- ① Relire la copie dans l'ordre des étapes : apparier, poser, résoudre.
- ② Citer l'étape fautive et expliquer l'erreur en une phrase, avec la règle du cours.
- ③ Rédiger la solution correcte avec les étapes du calcul de longueurs, puis vérifier.

On relit dans l'ordre des étapes, car tout ce qui suit une étape fautive est faux aussi : il faut trouver la première erreur.

En b), l'étape ③ est la copie complète du modèle L1 : les pastilles de b) sont celles de L1.

Sur la copie

Les triangles ABC et DEF sont semblables, avec $\hat{A} = \hat{D}$ et $\hat{C} = \hat{F}$; $AB = 6$, $AC = 8$ et $DF = 10$. Pour calculer DE , Hugo écrit : « $\frac{DF}{AB} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$, donc $DE = \frac{5}{3} \times AC = \frac{5}{3} \times 8 = \frac{40}{3}$. »

a) Trouver l'erreur. b) Rédiger la solution correcte.

a) ① Je relis la copie dans l'ordre des étapes : Hugo calcule un rapport sans avoir apparié les côtés.

② L'erreur est à l'étape « apparier » : Hugo a divisé DF par AB , qui ne sont pas homologues. Or les côtés homologues joignent des sommets homologues : avec $A \leftrightarrow D$ et $C \leftrightarrow F$, l'homologue de $[DF]$ est $[AC]$, et celui de $[DE]$ est $[AB]$.

b) ① Les angles donnent $A \leftrightarrow D$ et $C \leftrightarrow F$, donc aussi $B \leftrightarrow E$, les troisièmes angles : les côtés homologues sont $[AB] \leftrightarrow [DE]$, $[AC] \leftrightarrow [DF]$ et $[BC] \leftrightarrow [EF]$.

② Je range les côtés homologues dans un tableau :

côtés de ABC	$AB = 6$	$AC = 8$	BC
côtés de DEF	$DE = ?$	$DF = 10$	EF

③ Le rapport de similitude de ABC vers DEF est $k = \frac{DF}{AC} = \frac{10}{8} = 1,25$.

④ Pour aller vers le triangle DEF , je multiplie par k :

$$DE = 1,25 \times AB = 1,25 \times 6 = \boxed{7,5}$$

⑤ Vérification : $\frac{10}{8} = \frac{7,5}{6} = 1,25$: les rapports sont égaux. Le rapport est strictement supérieur à 1, donc chaque côté de DEF doit être strictement plus long que son homologue dans ABC : c'est le cas, $10 > 8$ et $7,5 > 6$. ✓

→ Au TD : exercice 5.1 (modèle V2, puis modèle L1 en b))

3.2 La configuration du papillon

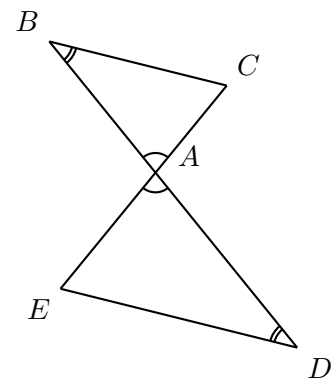
Une configuration à connaître : le papillon

Les segments $[BD]$ et $[CE]$ se coupent en leur intérieur en A , et les droites (BC) et (DE) sont parallèles.

Pourquoi les triangles ABC et ADE sont-ils semblables ? Deux paires d'angles de même mesure :

- $\widehat{BAC} = \widehat{DAE}$: angles opposés par le sommet ;
- $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$: angles alternes-internes formés par les parallèles (BC) et (DE) avec la sécante (BD) .

Donc ABC et ADE sont semblables ($A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow D$ et $C \leftrightarrow E$), et on calcule comme d'habitude : apparier, poser, résoudre.



$(BC) \parallel (DE)$

Cette figure s'appelle la configuration du « papillon ». Au chapitre 01C, le théorème de Thalès permettra d'y accéder directement ; pour l'instant, les angles suffisent amplement.

À toi : fondu guidé à compléter, du repérage au contrôle autonome

Sur la figure du papillon ci-dessus, on donne : $AB = 3$; $AD = 4,5$; $AC = 2,2$; $DE = 6$. L'aide se retire à chaque palier : ne lire le suivant qu'après avoir terminé le précédent.

Palier 1 : apparier (trame fournie). Avec $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow D$ et $C \leftrightarrow E$, les côtés homologues sont $[AB] \leftrightarrow [\dots]$, $[AC] \leftrightarrow [\dots]$, $[BC] \leftrightarrow [\dots]$.

Palier 2 : poser. Recopier et compléter le tableau des côtés homologues, triangle de départ ABC en haut, triangle d'arrivée ADE en bas.

Palier 3 : résoudre sans formule donnée. Calculer le rapport k de ABC vers ADE , puis AE et BC .

Retour, vérification autonome. Les trois rapports $\frac{AD}{AB}$, $\frac{AE}{AC}$, $\frac{DE}{BC}$ valent tous ; les longueurs sont cohérentes, car

Réponse à retourner seulement après la vérification : homologues $[AD]$, $[AE]$, $[DE]$; $k = \frac{4,5}{3} = 1,5$; $AE = 1,5 \times 2,2 = 3,3$; $BC = 6 \div 1,5 = 4$; rapport commun 1,5. On a $k > 1$, donc chaque côté de ADE est strictement plus long que son homologue dans ABC .

Modèle de rédaction J1 : démontrer une propriété (on sait que, or, donc)

Les étapes

- ① On sait que : écrire les hypothèses utiles, tirées de l'énoncé ou d'une question précédente.
- ② Or : citer en toutes lettres la propriété, la définition ou la règle de calcul qui s'applique.
- ③ Donc : écrire ce qu'elle donne sur la figure.
- ④ Enchaîner si besoin : la conclusion obtenue devient une donnée ; recommencer jusqu'au résultat demandé, puis finir par ■.

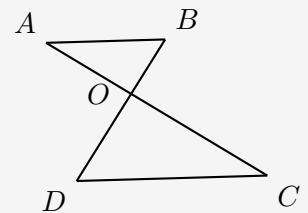
Des triangles semblables donnent des rapports égaux, et une égalité de rapports donne une égalité de produits (produits en croix, section 3.1) : l'étape ④ enchaîne ce second pas, la conclusion du premier devenant une donnée.

La question a) se rédige avec le modèle D2 ; la copie ci-contre est celle de la question b).

Sur la copie

Les segments $[AC]$ et $[BD]$ se coupent en O , et les droites (AB) et (CD) sont parallèles.

- a) Démontrer que les triangles OAB et OCD sont semblables.
- b) En déduire que $OA \times OD = OB \times OC$.



$(AB) \parallel (CD)$

b) ① On sait que les triangles OAB et OCD sont semblables, les sommets homologues étant $O \leftrightarrow O$, $A \leftrightarrow C$ et $B \leftrightarrow D$, d'après la question a).

② Or, si deux triangles sont semblables, alors les longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles.

$$\text{③ Donc } \frac{OC}{OA} = \frac{OD}{OB}.$$

④ Or, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, avec b et d non nuls, alors $a \times d = b \times c$: c'est l'égalité des produits en croix. Donc $OC \times OB = OA \times OD$, c'est-à-dire $OA \times OD = OB \times OC$. ■

→ Au TD : exercice 4.5 a) et b) facultatif (modèle J1)

Questions flash (sans aide)

1. Dans deux triangles semblables, face à des angles de même mesure, que trouve-t-on ?
2. ABC et DEF sont semblables ($A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ et $C \leftrightarrow F$), avec $AB = 5$, $DE = 8$. Que vaut le rapport de similitude de ABC vers DEF ? Et EF si $BC = 4$?
3. Quelle est la première étape du modèle L1, et pourquoi pas une autre ?

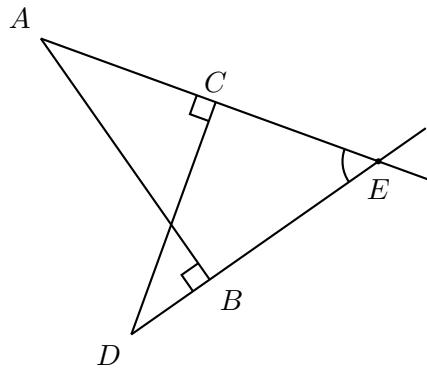
Réponses : 1) des côtés homologues ; 2) $k = \frac{5}{8} = 1,6$, donc $EF = 1,6 \times 4 = 6,4$; 3) apparier : tant que les côtés homologues ne sont pas identifiés par les angles, tout tableau et tout calcul peuvent être faux.

→ Au TD : exercices 1.4 et 6.2 (configuration du papillon : modèles D2, A1 et L1)

3.3 Une deuxième configuration à reconnaître : les hauteurs croisées

Configuration « des hauteurs »

Si les droites (AC) et (BD) se coupent en E , et si $(AB) \perp (BD)$ et $(CD) \perp (AC)$, alors les triangles ABE et DCE , supposés non aplatis, sont semblables.



$$(AB) \perp (BD) \text{ et } (CD) \perp (AC)$$

Pourquoi ? (deux lignes suffisent)

Outil de démonstration : preuve directe (deux paires d'angles de même mesure).

L'angle en E est commun aux triangles ABE et DCE (ou opposé par le sommet dans une autre disposition). Chacun possède aussi un angle droit : $\widehat{ABE} = 90^\circ$ car $(AB) \perp (BD)$, et $\widehat{DCE} = 90^\circ$ car $(CD) \perp (AC)$. Deux angles deux à deux de même mesure : les triangles ABE et DCE sont semblables, avec $B \leftrightarrow C$ (les angles droits), $E \leftrightarrow E$, $A \leftrightarrow D$. ■

Remarque

D'où le nom : dans le triangle ADE , (AB) est la hauteur issue de A (elle est perpendiculaire au côté opposé (ED)) et (DC) la hauteur issue de D . Deux hauteurs qui se croisent fabriquent donc toujours des triangles semblables : configuration à retenir à côté du papillon. On la retrouve au TD (exercice 4.5) et dans de nombreux problèmes avec cercles et tangentes.

Questions flash (sans aide)

1. Dans la configuration des hauteurs ci-dessus, quel angle est commun aux deux triangles ?
2. Quels sont les sommets homologues, et pourquoi ?

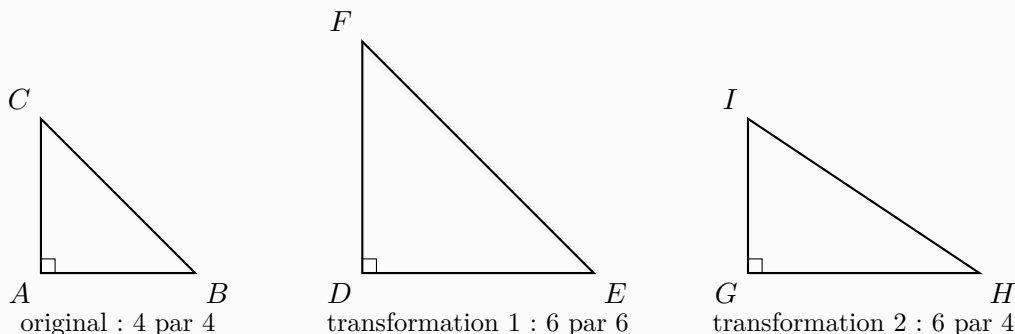
Réponses : 1) l'angle en E , formé par les deux droites sécantes ; 2) $B \leftrightarrow C$ (les deux angles droits), $E \leftrightarrow E$ (l'angle commun), $A \leftrightarrow D$ (les trois angles), toujours par les angles, jamais par la position.

→ Au TD : exercice 4.5 🧩 facultatif (configuration des hauteurs)

4 Agrandissement et réduction

Agrandir n'est pas étirer

On part d'un triangle rectangle isocèle dont les deux côtés de l'angle droit mesurent 4 cm.



1. Pour chaque transformation, calculer le coefficient appliqué au côté horizontal, puis celui appliqué au côté vertical.
2. Laquelle conserve l'angle de 45° du triangle initial ? Laquelle déforme le triangle ?
3. Formuler la condition qui distingue un véritable agrandissement d'un simple étirement.

Bilan. Dans la transformation 1, les deux coefficients valent $\frac{6}{4} = 1,5$: toutes les longueurs sont agrandies dans le même rapport et les angles sont conservés. Dans la transformation 2, les coefficients valent $\frac{6}{4} = 1,5$ horizontalement mais $\frac{4}{4} = 1$ verticalement : il n'existe

pas de rapport unique. L'angle aigu en H ne peut pas mesurer 45° : un triangle rectangle ayant un angle de 45° serait isocèle, alors qu'ici les deux côtés de l'angle droit mesurent 6 et 4. Le triangle est étiré, pas agrandi au sens mathématique.

4.1 Définition et échelle

Agrandissement, réduction

Soit $k > 0$. Une figure $\mathcal{F}'$ est un **agrandissement** (si $k > 1$) ou une **réduction** (si $0 < k < 1$) d'une figure $\mathcal{F}$ dans le rapport k lorsque toutes les longueurs de $\mathcal{F}'$ s'obtiennent en multipliant celles de $\mathcal{F}$ par k .

On lit $\mathcal{F}$ « F rond » et $\mathcal{F}'$ « F rond prime » : la lettre ronde désigne une figure quelconque (triangle, rectangle, disque, solide) et le prime signale la figure transformée. En clair : agrandir dans le rapport 3, c'est tripler toutes les longueurs de la figure ; réduire dans le rapport $\frac{1}{2}$, c'est toutes les diviser par 2. Le cas $k = 1$ redonne la figure de départ, à un déplacement près.

Remarque

- Pour des triangles, « T' est un agrandissement ou une réduction de T » équivaut à « T' et T sont semblables, avec $k \neq 1$ » : c'est le même rapport k . Le cas $k = 1$ est celui des triangles égaux.
- L'échelle d'un plan ou d'une carte est le rapport de la réduction, du réel vers le plan : un plan à l'échelle $\frac{1}{250}$ signifie $k = \frac{1}{250}$, c'est-à-dire que 1 cm sur le plan représente 250 cm = 2,5 m dans la réalité.
- Attention au vocabulaire : un rapport de 130 % ($k = 1,3 > 1$) est un agrandissement ; une réduction a un rapport strictement compris entre 0 et 1 (par exemple 80 % = 0,8).

Pourquoi convertir avant de diviser ?

Une échelle compare deux longueurs : c'est un quotient sans unité, qui ne doit pas dépendre de l'unité choisie. Sur un plan, si 4 cm représentent 1 m, le quotient $\frac{4}{1} = 4$ ferait croire à un agrandissement ; en écrivant 1 m = 100 cm, on obtient $\frac{4}{100} = \frac{1}{25}$, une réduction.

Modèle de rédaction A1 : calculer un rapport k (similitude, agrandissement, réduction) ou une échelle

Les étapes	Sur la copie
① Choisir deux longueurs homologues connues et les écrire dans la même unité.	Sur un plan, un mur de 12,5 m est représenté par un segment de 5 cm. Quelle est l'échelle du plan ?
② Diviser la longueur d'arrivée par la longueur homologue de départ : c'est k ; simplifier.	① Les longueurs homologues sont 12,5 m en réalité et 5 cm sur le plan ; dans la même unité, 12,5 m = 1 250 cm.
③ Conclure : si $k > 1$, c'est un agrandissement ; si $0 < k < 1$, une réduction ; pour un plan ou une carte, l'échelle s'écrit $\frac{1}{n}$.	② Le rapport du réel vers le plan est $k = \frac{5}{1\,250} = \frac{1}{250}$.
	③ On a $0 < k < 1$, donc c'est une réduction : l'échelle du plan est $\frac{1}{250}$.

→ Au TD : exercices 3.1 f) et g), 3.1 bis a), 3.5 a) et 4.1 b) (modèle A1)

4.2 Les effets d'un agrandissement–réduction : k , k^2 , k^3

Effets sur les longueurs, les angles, les aires et les volumes

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k :

les longueurs (côtés, périmètres, diagonales...)	$\times k$	1 dimension
les mesures d'angles	conservées	la forme ne change pas
les aires	$\times k^2$	2 dimensions
les volumes	$\times k^3$	3 dimensions

On lit k^2 « k au carré » ($k \times k$) et k^3 « k au cube » ($k \times k \times k$). En clair : si les longueurs sont multipliées par 4 ($k = 4$), les aires sont multipliées par 16 et les volumes par 64 ; si elles sont divisées par 10 ($k = \frac{1}{10}$), les aires sont divisées par 100 et les volumes par 1 000.

Pourquoi les aires sont-elles multipliées par k^2 ?

Outil de démonstration : calcul direct sur un rectangle, puis extension à toute surface.

Sur un rectangle. Soit un rectangle de longueur L et de largeur ℓ , d'aire $\mathcal{A} = L \times \ell$. Son agrandissement de rapport k est un rectangle de dimensions kL et $k\ell$, donc d'aire :

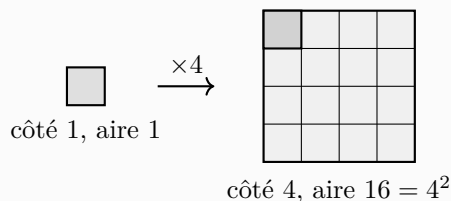
$$\mathcal{A}' = (kL) \times (k\ell) = k \times k \times L \times \ell = k^2 \times \mathcal{A}.$$

Sur un triangle. Si une base mesure b et la hauteur correspondante h , l'aire vaut $\mathcal{A} = \frac{b \times h}{2}$. Dans le triangle semblable, la base et la hauteur sont toutes deux des longueurs homologues : elles deviennent kb et kh . Donc

$$\mathcal{A}' = \frac{(kb) \times (kh)}{2} = k^2 \times \frac{b \times h}{2} = k^2 \mathcal{A}.$$

Le deuxième facteur k vient de la hauteur, même lorsqu'elle n'est pas dessinée.

On le voit sur un carré. Un carré de côté 1 agrandi dans le rapport 4 devient un carré de côté 4... qui contient $16 = 4^2$ carrés unités :



Pour les surfaces usuelles étudiées au collège, on peut approcher l'aire avec des quadrillages de plus en plus fins. Cela suggère l'extension de la règle $\times k^2$, démontrée ci-dessus pour les rectangles et les triangles ; son extension aux autres surfaces usuelles est admise ici. De même, un pavé de dimensions L, ℓ, h agrandi devient un pavé $kL, k\ell, kh$, de volume $k^3 \times L\ell h$: les volumes sont multipliés par k^3 .

▲ Attention

L'erreur la plus coûteuse du chapitre : la règle générale pour les aires est la multiplication par k^2 . Les expressions k et $2k$ ne donnent pas cette règle, même si elles peuvent coïncider avec k^2 pour certaines valeurs. Multiplier les longueurs par 10, c'est multiplier l'aire par 100 et le volume par 1 000. Avant de conclure, demande-toi : ma grandeur est-elle une longueur (1D), une aire (2D), un volume (3D) ?

Pourquoi k^2 ? Une parcelle sur un plan, deux voies de calcul qui concordent

Sur un plan à l'échelle $\frac{1}{25\,000}$, une parcelle rectangulaire mesure 4,4 cm sur 3,2 cm.
Voie 1 : passer par les longueurs.

$$4,4 \times 25\,000 = 110\,000 \text{ cm} = 1,1 \text{ km}, \quad 3,2 \times 25\,000 = 80\,000 \text{ cm} = 0,8 \text{ km}.$$

L'aire réelle vaut donc $1,1 \times 0,8 = 0,88 \text{ km}^2$.

Voie 2 : utiliser directement le rapport des aires. L'aire sur le plan vaut $4,4 \times 3,2 = 14,08 \text{ cm}^2$, et le coefficient des longueurs, du plan vers la réalité, vaut 25 000. Ainsi :

$$\mathcal{A}_{\text{réelle}} = 14,08 \times 25\,000^2 = 8\,800\,000\,000 \text{ cm}^2.$$

Or $1 \text{ km}^2 = 10\,000\,000\,000 \text{ cm}^2$, donc on retrouve $0,88 \text{ km}^2$.

Contrôle. Les deux voies donnent le même résultat ; si l'on avait multiplié l'aire par seulement 25 000, elles se seraient contredites.

Modèle de rédaction A2 : calculer une longueur, une aire ou un volume dans un agrandissement ou une réduction

Les étapes

- ① Nommer le sens du calcul, de la figure connue vers la figure cherchée, et le coefficient des longueurs dans ce sens : une échelle $\frac{1}{n}$ divise les longueurs par n du réel vers le plan, et les multiplie par n du plan vers le réel.
 - ② Identifier la dimension de la grandeur : une longueur (ou un périmètre) est multipliée par ce coefficient, une aire par son carré, un volume par son cube ; une mesure d'angle est conservée.
 - ③ Calculer dans l'unité de la donnée, puis convertir le résultat dans l'unité demandée.
 - ④ Conclure par une phrase, avec l'unité, puis vérifier par le calcul inverse.
- Une échelle $\frac{1}{n}$ est une réduction : du réel vers le plan ou la maquette, on divise par n ; dans l'autre sens, on multiplie par n .

Sur la copie

Maquette d'un voilier à l'échelle $\frac{1}{80}$.

- a) Le voilier mesure 18 m. Quelle est la longueur de la maquette, en cm ?
 - b) La voile de la maquette a une aire de 375 cm^2 . Quelle est l'aire de la voile réelle, en m^2 ?
 - c) La coque réelle a un volume de 128 m^3 . Quel est le volume de la coque de la maquette, en L ?
- a) ① Du voilier vers la maquette, les longueurs sont multipliées par $\frac{1}{80}$, c'est-à-dire divisées par 80.
 ② Je cherche une longueur : elle est divisée par 80.
 ③ $18 \div 80 = 0,225 \text{ m}$, et $0,225 \text{ m} = 22,5 \text{ cm}$.
 ④ Conclusion : la maquette mesure 22,5 cm de long.
Vérification : $0,225 \times 80 = 18$. ✓
- b) ① De la maquette vers le voilier, les longueurs sont multipliées par 80.
 ② Je cherche une aire : elle est multipliée par $80^2 = 6\,400$.
 ③ $375 \times 6\,400 = 2\,400\,000 \text{ cm}^2$, et $2\,400\,000 \text{ cm}^2 = 240 \text{ m}^2$, car $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$.
 ④ Conclusion : la voile réelle a une aire de 240 m².
Vérification : $2\,400\,000 \div 6\,400 = 375$. ✓
- c) ① Du voilier vers la maquette, les longueurs sont divisées par 80.
 ② Je cherche un volume : il est divisé par $80^3 = 512\,000$.
 ③ $128 \div 512\,000 = 0,000\,25 \text{ m}^3$, et $0,000\,25 \text{ m}^3 = 0,25 \text{ L}$, car $1 \text{ m}^3 = 1\,000 \text{ L}$.
 ④ Conclusion : la coque de la maquette a un volume de 0,25 L.
Vérification : $0,000\,25 \times 512\,000 = 128$. ✓

À toi : une cuve miniature (même modèle)

Une cuve réelle de volume $2,56 \text{ m}^3$ est reproduite à l'échelle $\frac{1}{40}$. Quel est le volume de la cuve miniature, en mL ?

Réponse : de la cuve réelle vers la maquette, les longueurs sont divisées par 40 ; un volume est divisé par $40^3 = 64\,000$; $2,56 \div 64\,000 = 0,000\,04 \text{ m}^3$, soit $0,04 \text{ L}$, c'est-à-dire 40 mL . Vérification : $0,000\,04 \times 64\,000 = 2,56$. Une petite cuve de quelques dizaines de millilitres est cohérente ; plusieurs litres signaleraient une erreur de sens ou l'oubli du cube.

Questions flash (sans aide)

1. Sur un plan à l'échelle $\frac{1}{400}$, une surface mesure $5,5 \text{ cm}^2$. Quelle est son aire réelle en m^2 ?
2. Une maquette à l'échelle $\frac{1}{25}$ représente un réservoir réel de $1,875 \text{ m}^3$. Quel est le volume de la maquette en mL ?
3. Quelle question faut-il poser avant de choisir entre k , k^2 et k^3 ?

Réponses : 1) $5,5 \times 400^2 = 880\,000 \text{ cm}^2 = 88 \text{ m}^2$; 2) $1,875 \div 25^3 = 0,000\,12 \text{ m}^3 = 0,12 \text{ L} = 120 \text{ mL}$; 3) « la grandeur cherchée est-elle une longueur, une aire ou un volume ? ».

→ Au TD : exercices 2.4 e), 2.5 b), 3.1, 3.1 bis b), 3.2, 3.3, 3.4 b), 3.6, 3.8 d) et e), 4.1 c) et e), 4.2, 6.3, 6.5, 6.6, 7.1 et 7.2 (modèle A2)

4.3 Sens inverse : retrouver k à partir des aires

Racine carrée d'un nombre positif

Pour un nombre r positif, la racine carrée de r est le nombre positif dont le carré vaut r . On la note $\sqrt{r}$.

On lit $\sqrt{r}$ « racine carrée de r ». En clair : $\sqrt{r}$ est le nombre positif qui, multiplié par lui-même, donne r ; par exemple $\sqrt{144} = 12$, car $12^2 = 144$ et $12 > 0$.

Pourquoi chercher le nombre positif dont le carré vaut le rapport des aires ?

Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k , les aires sont multipliées par k^2 (section 4.2) : le rapport des aires, aire d'arrivée divisée par aire de départ, vaut donc k^2 . De plus, $k > 0$ (c'est un rapport de longueurs), donc k est le nombre positif dont le carré vaut ce rapport : k est la racine carrée du rapport des aires. On ne divise pas ce rapport par 2 : le carré n'est pas le double.

Modèle de rédaction A3 : retrouver le rapport k à partir des aires

Les étapes

- ① Calculer le rapport des aires, aire d'arrivée divisée par aire de départ : il vaut k^2 .
- ② Chercher le nombre positif dont le carré vaut ce rapport : c'est k .
- ③ Conclure, puis vérifier en multipliant l'aire de départ par k^2 .

Sur la copie

Une figure d'aire $12,5 \text{ cm}^2$ est agrandie en une figure d'aire 200 cm^2 . Quel est le rapport de l'agrandissement ?

① Le rapport des aires vaut $\frac{200}{12,5} = 16$: c'est k^2 .

② Le nombre positif dont le carré vaut 16 est 4, car $4^2 = 16$.

③ Le rapport de l'agrandissement est $k = 4$.

Vérification : $12,5 \times 4^2 = 12,5 \times 16 = 200$. ✓

→ Au TD : exercices 3.1 d) et 3.3 b) (modèle A3)

Retrouver les longueurs à partir d'une aire

Deux triangles semblables ont des aires respectives 32 cm^2 et 72 cm^2 . Le périmètre du premier vaut 28 cm et l'une de ses hauteurs vaut 5,6 cm. On cherche les grandeurs homologues dans le second.

On retrouve d'abord k (modèle A3) : le rapport des aires vaut $\frac{72}{32} = \frac{9}{4} = 2,25$: c'est k^2 . Le nombre positif dont le carré vaut 2,25 est 1,5, car $1,5^2 = 2,25$: du premier triangle vers le second, $k = 1,5$.

On calcule ensuite les longueurs (modèle A2) : un périmètre et une hauteur sont des longueurs ; ils sont multipliés par k , et non par k^2 .

$$P' = 28 \times 1,5 = 42 \text{ cm}, \quad h' = 5,6 \times 1,5 = 8,4 \text{ cm}.$$

Contrôle. $\frac{42}{28} = \frac{8,4}{5,6} = 1,5$ et $\frac{72}{32} = 2,25 = 1,5^2$: les trois rapports sont compatibles.

À toi : sens inverse, à compléter

Un triangle T' est un agrandissement d'un triangle T . L'aire de T vaut 12 cm^2 , celle de T' vaut 75 cm^2 .

Le rapport des aires vaut $\frac{75}{12} = \dots\dots\dots$: c'est k^2 .

Le nombre positif dont le carré vaut ce rapport est $k = \dots\dots\dots$, car $(\dots\dots)^2 = \dots\dots\dots$.

Un côté de T mesure 8 cm ; son côté homologue dans T' mesure donc $\dots\dots\dots$.

Réponses : $\frac{75}{12} : \frac{12}{12} = 6,25$; $k = 2,5$, car $2,5^2 = 6,25$; côté homologue $8 \times 2,5 = 20 \text{ cm}$.

4.4 Contrôler un résultat

Côtés et angles d'un triangle (admis)

Dans un triangle, le plus grand côté est en face du plus grand angle, et le plus petit côté en face du plus petit angle.

En clair : plus un angle est ouvert, plus le côté qui lui fait face est long ; dans le triangle ABC de la section 2.2 d'angles 85° , 58° et 37° , le plus grand côté est $[BC]$, en face de l'angle de 85° .

Une seule transformation, un seul k

Quand deux figures se correspondent dans un agrandissement ou une réduction de rapport k , toutes leurs grandeurs homologues dépendent du même k :

$$\frac{L'}{L} = \frac{P'}{P} = k, \quad \frac{A'}{A} = k^2, \quad \frac{V'}{V} = k^3.$$

On lit $\frac{L'}{L}$ « L prime sur L » : c'est le quotient de la nouvelle longueur par l'ancienne ; P désigne un périmètre, A (« A rond ») une aire et V un volume. En clair : un même nombre k doit expliquer toutes les longueurs, son carré toutes les aires et son cube tous les volumes ; avec $k = 10$, une longueur est multipliée par 10, une aire par 100 et un volume par 1 000.

Pourquoi une seule valeur qui ne convient pas suffit-elle ?

Si les deux figures se correspondent vraiment dans une transformation de rapport k , toutes les grandeurs suivent les règles ci-dessus avec le même k . On calcule k avec une paire de longueurs homologues, puis on prévoit les autres valeurs. Si une valeur annoncée diffère

de la valeur prévue, les données ne peuvent pas être toutes exactes : une seule contradiction suffit à rejeter l'affirmation, alors qu'une concordance la rend seulement compatible.

Modèle de rédaction V3 : tester une affirmation chiffrée avec le rapport k

Les étapes

- ① Écrire le rapport k des longueurs, en le calculant avec deux longueurs homologues s'il n'est pas donné.
 - ② Prévoir la valeur attendue, avec le coefficient de la dimension : k , k^2 ou k^3 .
 - ③ Comparer la valeur prévue à la valeur annoncée.
 - ④ Conclure par une phrase : valeurs égales, l'affirmation est compatible ; une seule différence suffit pour la rejeter. Puis vérifier la valeur prévue par le calcul inverse.
- Ici, Inès a multiplié le volume par k au lieu de k^3 : $1,5 \times 0,4 = 0,6$.

Sur la copie

Deux bouteilles ont la même forme ; la grande, haute de 30 cm, contient 1,5 L ; la petite est haute de 12 cm. Inès affirme : « La petite bouteille contient 0,6 L. » A-t-elle raison ?

- ① De la grande bouteille vers la petite, les longueurs sont multipliées par $k = \frac{12}{30} = 0,4$.
 - ② Un volume est multiplié par $k^3 = 0,4^3 = 0,064$: la petite bouteille devrait contenir $1,5 \times 0,064 = 0,096$ L.
 - ③ Inès annonce 0,6 L, et $0,096 \neq 0,6$.
 - ④ Conclusion : Inès a tort ; la petite bouteille contient 0,096 L, soit 96 mL.
- Vérification : $0,096 \div 0,064 = 1,5$. ✓

→ Au TD : exercices 3.5 b) et 3.6 b) (modèle V3)

Diagnostic de cohérence : ne pas accepter toutes les données sans contrôle

Deux enseignes triangulaires sont annoncées semblables. Un côté de la première mesure 8,5 cm et son homologue sur la seconde 11,9 cm. Leurs périmètres annoncés sont 25 cm et 35 cm ; leurs aires annoncées sont 18 cm^2 et $34,2 \text{ cm}^2$.

De la première enseigne vers la seconde, les longueurs sont multipliées par $k = \frac{11,9}{8,5} = 1,4$.

Un périmètre est multiplié par k : on attend $25 \times 1,4 = 35$ cm. La valeur annoncée est 35 cm : cette donnée est compatible.

Une aire est multipliée par $k^2 = 1,4^2 = 1,96$: on attend $18 \times 1,96 = 35,28 \text{ cm}^2$. La valeur annoncée est $34,2 \text{ cm}^2$, et $35,28 \neq 34,2$.

Conclusion : les quatre données ne peuvent pas appartenir à un même couple de triangles semblables. Le dessin, même convaincant, ne réparerait pas cette contradiction numérique.

Pourquoi une règle suffit-elle, sans calcul ?

Les règles du cours valent pour toutes les figures : si une affirmation contredit l'une d'elles, elle est fausse, sans qu'il soit utile de calculer. Pour juger un résultat, on le compare à une grandeur connue de la vie courante : un ordre de grandeur absurde signale une erreur de sens ou de dimension.

Modèle de rédaction V1 : montrer sans calcul qu'une affirmation est fausse, ou qu'un résultat est vraisemblable

Les étapes

- ① Citer la règle du cours qui s'applique (dimension : k , k^2 ou k^3 ; sens : $k > 1$ agrandi, $0 < k < 1$ réduit ; dans un triangle, le plus grand côté est en face du plus grand angle) ou, pour juger un résultat, une grandeur de référence connue.
 - ② Comparer avec l'affirmation ou le résultat, et conclure : l'affirmation est fausse, ou le résultat est vraisemblable.
- Une phrase par étape : deux phrases courtes suffisent.

Sur la copie

a), b), c) : chaque affirmation est fausse ; expliquer pourquoi, sans calcul. d) : le résultat est-il vraisemblable ?

- a) Dans un agrandissement de rapport 4, l'aire est multipliée par 8.
- b) Dans une réduction, un segment de 5 cm devient un segment de 15 cm.
- c) Dans un triangle ABC d'angles $\hat{A} = 42^\circ$, $\hat{B} = 63^\circ$ et $\hat{C} = 75^\circ$, le plus grand côté est $[BC]$.
- d) La maquette au $\frac{1}{80}$ d'un voilier de 18 m mesure 22,5 cm.
 - a) ① Dans un agrandissement de rapport 4, les aires sont multipliées par $4^2 = 16$.
 - ② L'aire ne peut donc pas avoir été multipliée par 8 : l'affirmation est fausse.
 - b) ① Dans une réduction, le rapport est strictement compris entre 0 et 1 : toutes les longueurs raccourcissent.
 - ② Un segment de 5 cm ne peut donc pas devenir un segment de 15 cm, plus long : l'affirmation est fausse.
 - c) ① Dans un triangle, le plus grand côté est en face du plus grand angle.
 - ② Le plus grand angle, $\hat{C} = 75^\circ$, est en face du côté $[AB]$; le plus grand côté ne peut donc pas être $[BC]$: l'affirmation est fausse.
 - d) ① Une règle d'écolier mesure 20 cm.
 - ② Une maquette de 22,5 cm, à peine plus longue qu'une règle d'écolier, se pose sur une étagère : pour la maquette d'un voilier, le résultat est vraisemblable.

→ Au TD : exercices 3.3 d), 4.1 e), 4.2 d) et 5.2 (modèle V1)

Questions flash (sans aide)

1. Une figure est agrandie dans le rapport 11. Par combien son aire est-elle multipliée ? Son périmètre ?
2. Un solide est réduit à l'échelle $\frac{1}{10}$. Par combien son volume est-il divisé ?
3. L'aire d'une figure a été multipliée par 49. Quel était le rapport de l'agrandissement ?
4. Sur une carte à l'échelle $\frac{1}{25\,000}$, que représente 1 cm ?

Réponses : 1) aire $\times 121$, périmètre $\times 11$ (le périmètre est une longueur !); 2) par $10^3 = 1\,000$; 3) $k = 7$, car $7^2 = 49$; 4) 25 000 cm = 250 m.

Les erreurs classiques : et pourquoi on les commet

1. Confondre « semblables » et « égaux ». Semblables : même forme ; égaux : même forme et même taille ($k = 1$). L'erreur vient du langage courant, où « semblable » veut dire « pareil ». (Exercice 1.5 du TD.)
2. Prendre le rapport entre des côtés non homologues. Le rapport de similitude se lit entre côtés qui se correspondent par les angles : jamais entre « le premier côté cité de chaque triangle ». C'est l'étape « appairer », toujours en premier. (Exercices 2.3 et 5.1.)
3. Multiplier l'aire par k au lieu de k^2 . Une aire est en deux dimensions : chaque dimension est multipliée par k , donc l'aire par $k \times k$. (Exercices 3.1 et 5.2.)
4. Croire qu'un seul angle de même mesure suffit. Deux triangles peuvent partager un angle sans être semblables ($40^\circ - 110^\circ - 30^\circ$ contre $40^\circ - 70^\circ - 70^\circ$). Il faut deux paires d'angles de même mesure. (Exercice 1.1.)
5. Se tromper de sens avec k (multiplier quand il faut diviser). Toujours écrire de qui vers qui va le rapport : k est la longueur d'arrivée divisée par la longueur homologe de départ ; puis vérifier la cohérence : le résultat doit être plus grand si $k > 1$, plus petit si $k < 1$. (Exercice 1.4.)
6. Conclure « à l'œil » sur un dessin. Un dessin peut être trompeur (et n'est pas toujours à l'échelle) : on justifie par les angles ou par les trois rapports. (Exercice 1.2.)

Programmer deux triangles semblables

Même programme de tracé, longueurs modifiées

Pour tracer un triangle équilatéral, on répète trois fois : avancer de la longueur du côté, puis tourner de 120° . Le lutin tourne de 120° à l'extérieur du triangle ; l'angle intérieur vaut $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$.

On range la longueur dans une variable `cote`. En remplaçant 40 par 100 sans modifier les rotations ni le nombre de répétitions, on trace un autre triangle équilatéral. Les angles conservent la même mesure ; les triangles sont semblables, de rapport $k = \frac{100}{40} = 2,5$ du premier vers le second.

Les périmètres valent 120 pas et 300 pas : ils sont multipliés par 2,5. L'aire est multipliée par $2,5^2 = 6,25$. Si la première aire vaut $\mathcal{A}$, la seconde vaut $6,25\mathcal{A}$.

À exécuter. Exercice 3.8 du TD. On relève le stylo avant de déplacer le lutin entre les deux triangles, puis on rétablit la même direction de départ. Un déplacement stylo baissé ajouterait un segment qui ne fait pas partie des triangles.

Prévoir avant de lancer

Pour passer d'un côté de 40 pas à 10 pas, $k = \frac{10}{40} = 0,25$. Les angles restent à 60° , le périmètre est divisé par 4, l'aire par $4^2 = 16$. L'exécution contrôle le programme ; ce sont les angles de même mesure et le rapport des côtés qui justifient la similitude.

→ Au TD : exercice 3.8 (modèles A1, R1 et A2)

Fiche de synthèse

L'essentiel du chapitre en un tableau		
	Ce qu'il faut savoir	Le réflexe
Reconnaître	Triangles semblables $\iff$ côtés proportionnels $\iff$ angles deux à deux de même mesure (le symbole $\iff$ se lit « si, et seulement si »). Deux angles suffisent (la somme des trois angles vaut 180°).	Angles donnés $\rightarrow$ calculer le 3 ^e et comparer (R1). Côtés donnés $\rightarrow$ ranger, puis vérifier les trois rapports (R2).
Justifier	Sources d'angles de même mesure : donnée codée, angle commun, opposés par le sommet, alternes-internes ou correspondants (parallèles), angles droits.	Rédaction-type (D2) : « On sait que... / On sait de même que... / Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables / Donc les triangles... sont semblables, les sommets homologues étant... ».
Calculer	Apparier (par les angles) / poser (tableau des homologues) / résoudre (k , puis multiplier ou diviser) (L1).	Face au plus grand angle, le plus grand côté. Vérifier : les rapports égaux ? les côtés plus courts si $k < 1$?
Agrandir / réduire	Rapport k : longueurs $\times k$, angles conservés, aires $\times k^2$, volumes $\times k^3$. Échelle $\frac{1}{n} : k = \frac{1}{n}$ (A1, A2).	Ma grandeur est-elle 1D, 2D ou 3D ? Sens inverse : le rapport des aires vaut k^2 , puis chercher $k > 0$ (A3).

→ Au TD : pour réviser : sujets type Brevet 6.1 à 6.6

→ Au TD : 📖 facultatifs : 2.6, 3.7, 4.3 à 4.5, 5.4, 6.7 à 6.9 et 7.3 à 7.10

Questions flash (sans aide)
1. Angles 52° et 71° ici, 57° et 71° là : semblables ? 2. $k = \frac{3}{7}$: effet sur le périmètre ? sur l'aire ? 3. Le rapport de similitude peut-il être négatif ? 4. Une aire passe de 20 cm^2 à 720 cm^2 (agrandissement) : que vaut k^2 ? et k ? Réponses. 1) oui, troisième angles 57° et 52° : mêmes trois angles ; 2) périmètre $\times \frac{7}{3}$, aire $\times \frac{49}{9}$; 3) non, $k > 0$ (c'est un rapport de longueurs) ; 4) $k^2 = \frac{720}{20} = 36$, donc $k = 6$.

Je m’évalue (QCM) : une seule réponse exacte par question

1. Deux triangles semblables ont : A. les mêmes côtés B. des côtés proportionnels C. le même périmètre

2. Un triangle a des angles de 40° et 70° ; un autre a des angles de 70° et 70°. Ils sont forcément : A. semblables B. égaux C. ni l’un ni l’autre

3. Pour démontrer que deux triangles sont semblables, il suffit de : A. un angle de même mesure B. deux angles deux à deux de même mesure C. un côté commun

4. Les triangles ABC et DEF sont semblables ($A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ et $C \leftrightarrow F$). Le côté homologue de $[BC]$ est : A. $[DE]$ B. $[DF]$ C. $[EF]$

5. Les triangles ABC et DEF sont semblables, avec $AB = 8$ et $DE = 20$ (côtés homologues). Le rapport de similitude de ABC vers DEF est : A. 2,5 B. 0,4 C. 12
6. Dans la configuration du papillon, les angles en A (le point d’intersection) ont la même mesure car ils sont : A. alternes-internes B. opposés par le sommet C. correspondants

7. Un agrandissement de rapport 8 multiplie l’aire par : A. 8 B. 16 C. 64

8. Une réduction peut avoir pour rapport : A. 130 % B. 0,8 C. -2

9. Une maquette à l’échelle $\frac{1}{60}$: le volume réel est divisé par : A. 60 B. 3 600 C. 216 000

10. L’aire d’une figure est passée de 2 cm² à 162 cm² dans un agrandissement. Le rapport k vaut : A. 81 B. 9 C. 160

Réponses. 1 B ; 2 A (troisièmes angles : 70° et 40°, mêmes trois angles) ; 3 B ; 4 C ; 5 A ; 6 B ; 7 C ; 8 B ; 9 C (60°) ; 10 B

Lexique de consultation progressive

La carte des modèles de rédaction			
Code	Type d'exercice	Les étapes, en bref	Exercices du TD
R1	Semblables ? (par les angles)	troisième angle, les trois angles, conclusion	1.1, 3.8 d), 6.4 a)
R2	Semblables ? (par les côtés)	ranger, trois rapports, conclusion	1.2
R3	Triangle isocèle : ses angles	au sommet, à la base, un ou deux cas	1.1 e), 1.5 d) e)
D1	Deux angles de même mesure (parallèles)	on sait que, or, donc	2.2 a), 6.1 a)
D2	Triangles semblables (deux angles)	une paire, une autre, or, donc	1.3, 1.4 a), 2.2 b), 2.3 a) d), 2.4 c) d), 3.3 a), 3.4 a), 5.3 a), 6.1 b), 6.2 a)
D3	Triangles semblables (un angle et deux côtés)	l'angle, deux rapports, or, donc	2.5 a)
L1	Calculer des longueurs	apparier, poser, k , calculer, vérifier	1.4 b) c), 2.1 b) c), 2.2 c), 2.3, 2.4 c) d), 5.1 b), 5.3, 6.1 c), 6.2 b), 6.4 b) c)
A1	Rapport k , échelle	même unité, arrivée sur départ, agrandissement ou réduction	1.4 a), 2.1 a), 3.1 f) g), 3.1 bis a), 3.4 a), 3.5 a), 3.8 c) e), 4.1 b), 6.3 a)
A2	Longueur, aire, volume	sens, dimension, calcul, conclusion et vérification	2.4 e), 2.5 b), 3.1, 3.1 bis b), 3.2, 3.3, 3.4 b), 3.6, 3.8 d) e), 4.1 c) e), 4.2, 6.3, 6.5, 6.6, 7.1, 7.2
A3	Retrouver k (aires)	rapport des aires, racine, vérification	3.1 d), 3.3 b)
V1	Sans calcul	règle ou référence, conclusion	3.3 d), 4.1 e), 4.2 d), 5.2
V2	Corriger une copie	relire, l'erreur, la solution	5.1
V3	Tester une affirmation	k , valeur prévue, comparaison, conclusion	3.5 b), 3.6 b)
T2	Vrai ou faux	réponse, démonstration ou contre-exemple	1.5
J1	Démontrer	on sait que, or, donc, ■	4.5 a) b)  , 5.4 a) 
J2	Triangle rectangle (Pythagore)	plus grand côté, deux calculs, conclusion	2.4 a), 4.1 d)