



Correction de la feuille d'exercices

Triangles semblables : Agrandissements et réductions

Difficulté : ☆☆☆ très facile ★☆☆ facile ★★★ moyen ★★★★★ difficile

Parcours : 🏃 minimum 🎯 recommandé 🏆 perfectionnement

Les encadrés grisés 📝 montrent comment rédiger sur une copie de contrôle.

À retenir. Triangles semblables. Longueurs des côtés proportionnelles $\iff$ angles deux à deux de même mesure (le symbole $\iff$ se lit « si, et seulement si »), et deux paires d'angles suffisent. Face à des angles de même mesure : des côtés homologues.

Les trois gestes. Apparier (par les angles) / poser (tableau des homologues) / résoudre (k ou produit en croix), puis vérifier (trois rapports égaux, cohérence grand/petit).

Agrandissement-réduction de rapport k . Longueurs et périmètres multipliés par k ; mesures d'angles conservées ; aires multipliées par k^2 ; volumes multipliés par k^3 . Sens inverse : le rapport des aires vaut k^2 .

📝 Corrigé de la fluence. a) $180^\circ - 47^\circ - 86^\circ = 47^\circ$. b) $180^\circ - 90^\circ - 26^\circ = 64^\circ$. c) oui : troisièmes angles 80° et 40° , angles deux à deux de même mesure. d) $3^2 = 9$. e) $2^3 = 8$. f) $k = 5$ (car $5^2 = 25$). g) $\frac{3}{4,5} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$. h) $7 \times 0,5 = 3,5$ cm. i) $15 \times 1,2 = 18$ cm. j) $3 \times 100 = 300$ cm = 3 m.

📝 Corrigé de la réactivation. 1) $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$. 2) $\frac{54}{36} = \frac{18 \times 3}{18 \times 2} = \frac{3}{2}$. 3) $\frac{3}{5} \times \frac{10}{9} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$. 4) $0,5^3 = 0,125$; $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$. 5) $1,25 \times 10^4 = 12\,500$.

1. Reconnaître des triangles semblables

1.1. Semblables ou pas ? (par les angles) 🏃

★☆☆

Méthode. Modèles associés : **R1** (questions a) à f)) ; **R3** (question e)).

📝 a) Dans le triangle ABC , le troisième angle mesure : $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 47^\circ - 86^\circ = 47^\circ$.

Dans le triangle DEF , le troisième angle mesure : $\widehat{F} = 180^\circ - \widehat{D} - \widehat{E} = 180^\circ - 47^\circ - 86^\circ = 47^\circ$.

Les angles de ABC sont 47° , 47° et 86° ; ceux de DEF sont 47° , 47° et 86° .

Les deux triangles ont des angles deux à deux de même mesure : d'après la caractérisation angulaire, ils sont semblables.

b) Dans le triangle ABC , le troisième angle mesure : $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 35^\circ - 72^\circ = 73^\circ$.

Dans le triangle DEF , le troisième angle mesure : $\widehat{F} = 180^\circ - \widehat{D} - \widehat{E} = 180^\circ - 73^\circ - 35^\circ = 72^\circ$.

Les angles de ABC sont 35° , 72° et 73° ; ceux de DEF sont 35° , 72° et 73° .

Les deux triangles ont des angles deux à deux de même mesure : d'après la caractérisation angulaire, ils sont semblables.

📝 c) Dans le triangle ABC , le troisième angle mesure : $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 50^\circ - 60^\circ = 70^\circ$.

Dans le triangle DEF , le troisième angle mesure : $\widehat{F} = 180^\circ - \widehat{D} - \widehat{E} = 180^\circ - 60^\circ - 65^\circ = 55^\circ$.

Les angles de ABC sont 50° , 60° et 70° ; ceux de DEF sont 55° , 60° et 65° .

Les deux triangles n'ont pas leurs angles deux à deux de même mesure : d'après la caractérisation angulaire, ils ne sont pas semblables.

d) ABC est rectangle en A , donc son troisième angle mesure $\widehat{C} = 180^\circ - 90^\circ - 32^\circ = 58^\circ$.

DEF est rectangle en D , donc son troisième angle mesure $\widehat{F} = 180^\circ - 90^\circ - 58^\circ = 32^\circ$.

Les angles de ABC sont 32° , 58° et 90° ; ceux de DEF sont 32° , 58° et 90° .

Les deux triangles ont des angles deux à deux de même mesure : d'après la caractérisation angulaire, ils sont semblables.

📝 e) Dans le triangle ABC , le troisième angle mesure : $\widehat{C} = 180^\circ - \widehat{A} - \widehat{B} = 180^\circ - 44^\circ - 68^\circ = 68^\circ$.

DEF est isocèle en D et son angle au sommet principal mesure 92° : ses deux angles à la base, de même mesure, valent chacun $\widehat{E} = \widehat{F} = (180^\circ - 92^\circ) \div 2 = 88^\circ \div 2 = 44^\circ$.

Les angles de ABC sont 44° , 68° et 68° ; ceux de DEF sont 44° , 44° et 92° .

Les deux triangles n'ont pas leurs angles deux à deux de même mesure : d'après la caractérisation angulaire, ils ne sont pas semblables.

f) ABC est équilatéral : ses trois angles ont la même mesure et valent chacun $\widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} = 180^\circ \div 3 = 60^\circ$.

Dans le triangle DEF , le troisième angle mesure : $\widehat{F} = 180^\circ - \widehat{D} - \widehat{E} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$.

Les angles de ABC sont 60° , 60° et 60° ; ceux de DEF sont 60° , 60° et 60° .

Les deux triangles ont des angles deux à deux de même mesure : d'après la caractérisation angulaire, ils sont semblables.

Attention ! En a), les angles donnés, $\widehat{A} = 47^\circ$ et $\widehat{B} = 86^\circ$ dans ABC , $\widehat{D} = 47^\circ$ et $\widehat{E} = 47^\circ$ dans DEF , semblent différents : c'est le troisième angle qui tranche. On ne compare les triangles qu'après l'avoir calculé.

1.2. Semblables ou pas ? (par les côtés)

★★☆☆

Méthode. Modèle associé : **R2**.

 a) Premier couple. Je range les côtés du plus petit au plus grand. Dans ABC : $AB = 3$; $BC = 4$; $AC = 5$. Dans DEF : $DE = 6$; $EF = 8$; $DF = 10$.

Je calcule les trois rapports des côtés de même rang, de ABC vers DEF :

$$\frac{DE}{AB} = \frac{6}{3} = 2 \quad \frac{EF}{BC} = \frac{8}{4} = 2 \quad \frac{DF}{AC} = \frac{10}{5} = 2$$

On a $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = 2$: les trois rapports sont égaux, les longueurs des côtés sont proportionnelles, donc les triangles sont semblables, de rapport $k = 2$ de ABC vers DEF (agrandissement).

 Deuxième couple. Je range les côtés du plus petit au plus grand. Dans ABC : $AB = 3$; $BC = 4$; $AC = 5$. Dans DEF : $DE = 4$; $EF = 5$; $DF = 6$.

Je calcule les trois rapports des côtés de même rang, de ABC vers DEF :

$$\frac{DE}{AB} = \frac{4}{3} \quad \frac{EF}{BC} = \frac{5}{4} = 1,25 \quad \frac{DF}{AC} = \frac{6}{5} = 1,2$$

On a $\frac{EF}{BC} \neq \frac{DF}{AC}$. Les rapports 1,25 et 1,2 sont différents : les longueurs des côtés ne sont pas proportionnelles, donc les triangles ne sont pas semblables.

 Troisième couple. Je range les côtés du plus petit au plus grand. Dans ABC : $AB = 4,5$; $BC = 6$; $AC = 7,5$. Dans DEF : $DE = 3$; $EF = 4$; $DF = 5$.

Je calcule les trois rapports des côtés de même rang, de ABC vers DEF :

$$\frac{DE}{AB} = \frac{3}{4,5} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3} \quad \frac{EF}{BC} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \frac{DF}{AC} = \frac{5}{7,5} = \frac{50}{75} = \frac{2}{3}$$

On a $\frac{DE}{AB} = \frac{EF}{BC} = \frac{DF}{AC} = \frac{2}{3}$: les trois rapports sont égaux, les longueurs des côtés sont proportionnelles, donc les triangles sont semblables, de rapport $k = \frac{2}{3}$ de ABC vers DEF (réduction).

 b) Je range les côtés du plus petit au plus grand. Dans ABC : $AB = 5$ cm ; $BC = 6,5$ cm ; $AC = 8$ cm. Dans EFG : $EF = 1$ cm ; $FG = 1,2$ cm ; $EG = 1,6$ cm.

Je calcule les trois rapports des côtés de même rang, de ABC vers EFG :

$$\frac{EF}{AB} = \frac{1}{5} = 0,2 \quad \frac{FG}{BC} = \frac{1,2}{6,5} = \frac{12}{65} \quad \frac{EG}{AC} = \frac{1,6}{8} = 0,2$$

On a $\frac{EF}{AB} = \frac{EG}{AC} = 0,2$, mais $\frac{FG}{BC} = \frac{12}{65} \neq 0,2$ (car $0,2 \times 6,5 = 1,3 \neq 1,2$). Ainsi, $\frac{EF}{AB} = \frac{EG}{AC} \neq \frac{FG}{BC}$: les longueurs des côtés ne sont pas proportionnelles, donc EFG n'est pas une réduction de ABC .

Pour que le triangle EFG soit une réduction de rapport 0,2, il faudrait que $\frac{FG}{BC} = 0,2$, soit $FG = 0,2 \times BC = 0,2 \times 6,5 = 1,3$ cm. Je remplace donc $FG = 1,2$ cm par $FG = 1,3$ cm. Je vérifie les trois rapports, de ABC vers EFG :

$$\frac{EF}{AB} = \frac{1}{5} = 0,2 \quad \frac{FG}{BC} = \frac{1,3}{6,5} = 0,2 \quad \frac{EG}{AC} = \frac{1,6}{8} = 0,2$$

Les trois rapports valent alors 0,2 : EFG est une réduction de ABC , de coefficient $k = 0,2$.

À retenir. Une autre modification convient : remplacer $BC = 6,5$ cm par $BC = 6$ cm, car $1,2 \div 0,2 = 6$. Les trois rapports valent alors aussi 0,2.

1.2. Enrichissement facultatif

Correction détaillée : addition et conservation de la forme

A1. Distinguer différences et quotients

Chaque longueur augmente de 1, mais son coefficient multiplicateur dépend de sa valeur initiale :

Côtés initiaux	Nouveaux côtés	Quotient 1	Quotient 2	Quotient 3
(3; 4; 5)	(4; 5; 6)	4/3	5/4	6/5
(5; 5; 8)	(6; 6; 9)	6/5	6/5	9/8
(4; 4; 4)	(5; 5; 5)	5/4	5/4	5/4

A2. Vérifier les objets avant de les comparer

Les listes sont rangées et positives. On vérifie $4 + 5 > 6$, $6 + 6 > 9$ et $5 + 5 > 5$: il s'agit bien de trois triangles non aplatis.

Pour la première paire, $4/3 \neq 5/4$, puisque les produits en croix $4 \times 4 = 16$ et $3 \times 5 = 15$ diffèrent. Pour la deuxième, $6/5 \neq 9/8$, car $6 \times 8 = 48 \neq 45 = 5 \times 9$. Deux quotients différents suffisent à exclure la proportionnalité ; ces deux paires ne sont donc pas semblables.

Pour la troisième paire, les trois quotients valent $5/4$: les triangles sont semblables, de rapport $5/4$ (agrandissement). Deux côtés de même longueur ne suffisaient pas dans la deuxième ligne ; ici, les trois ont la même longueur.

A3. Passer des essais à une question générale

La conjecture est : « ajouter une même longueur positive aux trois côtés conserve la forme exactement pour les triangles équilatéraux ». Les essais la suggèrent, mais ne traitent ni toutes les longueurs initiales ni toutes les additions positives. Il faut raisonner avec des nombres quelconques a, b, c, t dans les conditions de l'énoncé.

B1. L'addition positive préserve l'existence du triangle

Puisque a, b, c, t sont positifs, les trois nouveaux côtés sont positifs. Ajouter le même nombre conserve l'ordre : $a + t \leq b + t \leq c + t$.

Le triangle initial donne $a + b > c$. En ajoutant $2t$, puis en utilisant $t > 0$, on obtient

$$(a + t) + (b + t) = a + b + 2t > c + 2t > c + t.$$

La somme des deux plus petits nouveaux côtés est strictement supérieure au plus grand : un nouveau triangle non aplati existe. Cela ne prouve pas encore sa similitude avec le premier.

B2. Ce qu'impose la similitude

Les côtés rangés dans le même ordre doivent être proportionnels. Comme a et b sont non nuls,

$$\frac{a+t}{a} = \frac{b+t}{b} \implies b(a+t) = a(b+t) \implies ab + bt = ab + at.$$

On soustrait ab aux deux membres : $bt = at$. On peut ensuite diviser par t , puisque $t > 0$, ce qui donne $b = a$.

Avec les côtés a et c , la même démarche donne $c(a+t) = a(c+t)$, puis $ct = at$ et $c = a$. Ainsi $a = b = c$: toute solution est un triangle équilatéral. On vient de démontrer une condition nécessaire.

B3. Vérifier que la condition suffit

Réciproquement, pour un triangle équilatéral de côté $a > 0$, les trois nouveaux côtés valent $a + t$. Ils forment un triangle équilatéral et les trois rapports valent

$$k = \frac{a+t}{a} = 1 + \frac{t}{a} > 1.$$

Ils sont donc bien semblables. La condition est suffisante aussi : pour toute augmentation commune $t > 0$, le nouveau triangle est semblable au triangle initial si et seulement si le triangle initial est équilatéral. Cette conclusion répond à tous les cas autorisés, pas seulement aux trois essais.

C1. Le cas exclu $t = 0$

Avec $t = 0$, aucun côté ne change : chaque triangle est égal, donc semblable, à lui-même, avec $k = 1$. Tous les triangles conviennent. En B2, on obtiendrait $b \times 0 = a \times 0$, ce qui est vrai sans imposer $a = b$. Diviser par zéro est interdit : c'est exactement l'étape qui utilisait l'hypothèse $t > 0$.

C2. Des longueurs positives peuvent ne pas former un triangle

Retirer 2 donne (1; 2; 3). Les longueurs sont positives, mais $1 + 2 = 3$: les segments ne peuvent former qu'une configuration aplatie. Il n'existe donc pas de triangle non aplati à comparer au premier.

En B1, l'augmentation renforçait l'inégalité triangulaire : on ajoutait $2t$ à la somme des petits côtés, contre t au grand. Ici, on retire 4 à cette somme et seulement 2 au grand côté. L'inégalité stricte peut disparaître. La vérification des conditions géométriques précède celle des quotients.

1.3. Justifier la similitude : trois configurations

★★☆☆

Méthode. Modèle associé : D2.

a) L'angle en A est commun aux triangles AMN et ABC (avec $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$), donc $\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$.

Les droites parallèles (MN) et (BC) sont coupées par la sécante (AB) en M et B respectivement. Les angles correspondants $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$ ont donc la même mesure : $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$.

Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

Donc les triangles AMN et ABC sont semblables, les sommets homologues étant $A \leftrightarrow A$, $M \leftrightarrow B$ et $N \leftrightarrow C$. ■

b) Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont opposés par le sommet (avec les droites (AC) et (BD) sécantes en O), donc $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$.

D'après le codage de l'énoncé, on sait que $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$.

Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

Donc les triangles OAB et OCD sont semblables, les sommets homologues étant $O \leftrightarrow O$, $A \leftrightarrow C$ et $B \leftrightarrow D$. ■

c) L'angle en A est commun aux triangles ADE et ACB (avec $D \in [AB]$ et $E \in [AC]$), donc $\widehat{DAE} = \widehat{CAB}$.

D'après le codage de l'énoncé, on sait que $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$.

Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

Donc les triangles ADE et ACB sont semblables, les sommets homologues étant $A \leftrightarrow A$, $D \leftrightarrow C$ et $E \leftrightarrow B$. ■

Attention ! En c), l'appariement est croisé : D , placé sur $[AB]$, correspond à C , et E , placé sur $[AC]$, correspond à B . Ce sont les angles de même mesure qui décident, jamais la position des lettres sur la figure.

1.4. La configuration du papillon ☼

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **D2** (question a)) ; **A1** (question a)) ; **L1** (questions b) et c)).

a) Les angles $\widehat{DAE}$ et $\widehat{BAC}$ sont opposés par le sommet (avec les droites (BD) et (CE) sécantes en A), donc $\widehat{DAE} = \widehat{BAC}$.

Les droites parallèles (DE) et (BC) sont coupées par la sécante (BD) en D et B respectivement. Les angles alternes-internes $\widehat{ADE}$ et $\widehat{ABC}$ ont donc la même mesure : $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$.

Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

Donc les triangles ADE et ABC sont semblables, les sommets homologues étant $A \leftrightarrow A$, $D \leftrightarrow B$ et $E \leftrightarrow C$. ■

Les côtés homologues $[AD]$ et $[AB]$ joignent les sommets homologues $A \leftrightarrow A$ et $D \leftrightarrow B$.

Le rapport de similitude de ABC vers ADE est $k = \frac{AD}{AB} = \frac{4,8}{3,6} = \frac{48}{36} = \frac{4}{3}$.

On a $k > 1$, donc le triangle ADE est un agrandissement du triangle ABC , de rapport $k = \frac{4}{3}$.

b) D'après la question a), $A \leftrightarrow A$, $D \leftrightarrow B$ et $E \leftrightarrow C$: les côtés homologues sont $[AD] \leftrightarrow [AB]$, $[AE] \leftrightarrow [AC]$ et $[DE] \leftrightarrow [BC]$.

Je range les côtés homologues dans un tableau :

côtés de ABC	$AB = 3,6$	$AC = 2,4$	BC
côtés de ADE	$AD = 4,8$	$AE = ?$	DE

D'après la question a), le rapport de similitude de ABC vers ADE est $k = \frac{4}{3}$.

Pour aller vers le triangle ADE , je multiplie par k : $AE = \frac{4}{3} \times AC = \frac{4}{3} \times 2,4 = \frac{4 \times 2,4}{3} = \frac{9,6}{3} = 3,2 \text{ cm}$.

Vérification : $\frac{4,8}{3,6} = \frac{3,2}{2,4} = \frac{4}{3}$: les rapports sont égaux. Le rapport est strictement supérieur à 1, donc chaque côté de ADE doit être strictement plus long que son homologue dans ABC : c'est le cas, $4,8 > 3,6$ et $3,2 > 2,4$. ✓

c) Je complète le tableau de la question b) :

côtés de ABC	$AB = 3,6$	$AC = 2,4$	$BC = ?$
côtés de ADE	$AD = 4,8$	$AE = 3,2$	$DE = 5,2$

D'après la question a), le rapport de similitude de ABC vers ADE est $k = \frac{4}{3}$.

Pour revenir vers le triangle ABC , je divise par k ; diviser par $\frac{4}{3}$, c'est multiplier par son inverse $\frac{3}{4}$:

$$BC = DE \div \frac{4}{3} = 5,2 \times \frac{3}{4} = \frac{5,2 \times 3}{4} = \frac{15,6}{4} = 3,9 \text{ cm}$$

Vérification : $\frac{4,8}{3,6} = \frac{3,2}{2,4} = \frac{5,2}{3,9} = \frac{4}{3}$: les rapports sont égaux. Le rapport est strictement supérieur à 1, donc chaque côté de ADE doit être strictement plus long que son homologue dans ABC : c'est le cas, $4,8 > 3,6$, $3,2 > 2,4$ et $5,2 > 3,9$. ✓

À retenir. Dans la configuration du papillon à ailes parallèles, les deux paires d'angles de même mesure viennent toujours des mêmes sources : les angles opposés par le sommet, et les angles alternes-internes formés par les deux parallèles.

1.5. Vrai ou faux ? ☼

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **T2** (questions a) à g)) ; **R3** (questions d) et e)).

a) VRAI.

Dans un triangle équilatéral, les trois angles ont la même mesure et valent chacun $180^\circ \div 3 = 60^\circ$. Deux triangles équilatéraux ont donc leurs angles deux à deux de même mesure, 60° , 60° et 60° : d'après la caractérisation angulaire, ils sont toujours semblables. ■

b) FAUX.

Contre-exemple : deux triangles isocèles, dont les angles au sommet principal mesurent 120° et 90° . Les angles à la base valent chacun $(180^\circ - 120^\circ) \div 2 = 60^\circ \div 2 = 30^\circ$ dans le premier, et $(180^\circ - 90^\circ) \div 2 = 90^\circ \div 2 = 45^\circ$ dans le second : leurs angles sont 120° , 30° , 30° et 90° , 45° , 45° . Ils sont tous les deux isocèles, mais ils n'ont pas leurs angles deux à deux de même mesure : ils ne sont pas semblables.

c) FAUX.

Contre-exemple : un triangle rectangle qui a un angle de 45° , et un triangle rectangle qui a un angle de 30° . Leurs troisièmes angles valent $180^\circ - 90^\circ - 45^\circ = 45^\circ$ et $180^\circ - 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$: leurs angles sont 90° , 45° , 45° et 90° , 30° , 60° . Ils sont tous les deux rectangles, mais ils n'ont pas leurs angles deux à deux de même mesure : ils ne sont pas semblables.

d) VRAI.

Si l'angle droit est l'angle au sommet principal, les deux angles à la base valent chacun $(180^\circ - 90^\circ) \div 2 = 90^\circ \div 2 = 45^\circ$: les angles sont 90° , 45° et 45° .

Si l'angle droit était un angle à la base, l'autre angle à la base mesurerait aussi 90° : ces deux angles auraient déjà une somme de 180° , et il ne resterait rien pour l'angle au sommet principal. Ce cas est impossible.

Un seul cas est possible : les angles sont forcément 90° , 45° et 45° . Deux tels triangles ont leurs angles deux à deux de même mesure : d'après la caractérisation angulaire, ils sont toujours semblables. ■

e) FAUX.

Si l'angle de 80° est l'angle au sommet principal, les deux angles à la base valent chacun $(180^\circ - 80^\circ) \div 2 = 100^\circ \div 2 = 50^\circ$: les angles sont 80° , 50° et 50° .

Si l'angle de 80° est un angle à la base, l'autre angle à la base mesure aussi 80° , et l'angle au sommet principal vaut $180^\circ - 80^\circ - 80^\circ = 20^\circ$: les angles sont 80° , 80° et 20° .

Deux cas sont possibles, avec des angles différents. Contre-exemple : les deux triangles isocèles obtenus, d'angles 80° , 50° , 50° et 80° , 80° , 20° . Ils ont chacun un angle de 80° , mais ils n'ont pas leurs angles deux à deux de même mesure : ils ne sont pas semblables.

f) FAUX.

Contre-exemple : un triangle équilatéral de côté 2 cm et un triangle équilatéral de côté 5 cm. Leurs angles mesurent tous 60° : d'après la caractérisation angulaire, ils sont semblables. Mais leurs côtés n'ont pas la même longueur : ils ne sont pas égaux.

g) VRAI.

Deux triangles égaux ont leurs côtés deux à deux de même longueur et leurs angles deux à deux de même mesure. D'après la caractérisation angulaire, ils sont toujours semblables. ■

2. Calculer des longueurs

2.1. Premier calcul, deux façons

★★☆

Méthode. Modèles associés : **A1** (question a)) ; **L1** (questions b) et c)).

a) Les côtés homologues $[RS]$ et $[UV]$ joignent les sommets homologues $R \leftrightarrow U$ et $S \leftrightarrow V$.

Le rapport de similitude de RST vers UVW est $k = \frac{UV}{RS} = \frac{6}{4} = 1,5$.

On a $k > 1$, donc le triangle UVW est un agrandissement du triangle RST , de rapport $k = 1,5$.

b) D'après l'énoncé, $R \leftrightarrow U$, $S \leftrightarrow V$ et $T \leftrightarrow W$: les côtés homologues sont $[RS] \leftrightarrow [UV]$, $[RT] \leftrightarrow [UW]$ et $[ST] \leftrightarrow [VW]$.

Je range les côtés homologues dans un tableau :

côtés de RST	$RS = 4$	$RT = 8$	$ST = 6$
côtés de UVW	$UV = 6$	$UW = ?$	$VW = ?$

D'après la question a), le rapport de similitude de RST vers UVW est $k = 1,5$.

Pour aller vers le triangle UVW , je multiplie par k : $VW = 1,5 \times ST = 1,5 \times 6 = 9$.

Par l'égalité des produits en croix : dans le tableau, $\frac{VW}{ST} = \frac{UV}{RS}$, c'est-à-dire $\frac{VW}{6} = \frac{6}{4}$. L'égalité des produits en croix donne $4 \times VW = 6 \times 6$, donc $VW = \frac{6 \times 6}{4} = \frac{36}{4} = 9$. Je retrouve le même résultat.

Ici, le coefficient est le plus rapide : $k = 1,5$ est un nombre décimal simple, une seule multiplication suffit, alors que le produit en croix demande une multiplication, puis une division.

Vérification : $\frac{6}{4} = \frac{9}{6} = 1,5$: les rapports sont égaux. Le rapport est strictement supérieur à 1, donc chaque côté de UVW doit être strictement plus long que son homologue dans RST : c'est le cas, $6 > 4$ et $9 > 6$. ✓

c) Je complète le tableau de la question b) :

côtés de RST	$RS = 4$	$RT = 8$	$ST = 6$
côtés de UVW	$UV = 6$	$UW = ?$	$VW = 9$

D'après la question a), le rapport de similitude de RST vers UVW est $k = 1,5$.

Pour aller vers le triangle UVW , je multiplie par k : $UW = 1,5 \times RT = 1,5 \times 8 = 12$.

Vérification : $\frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{9}{6} = 1,5$: les rapports sont égaux. Le rapport est strictement supérieur à 1, donc chaque côté de UVW doit être strictement plus long que son homologue dans RST : c'est le cas, $6 > 4$, $12 > 8$ et $9 > 6$. ✓

d) Le périmètre du triangle RST vaut $RS + RT + ST = 4 + 8 + 6 = 18$.

Le périmètre du triangle UVW vaut $UV + UW + VW = 6 + 12 + 9 = 27$.

Je remarque que $1,5 \times 18 = 27$: le périmètre est multiplié par k . C'était prévisible : le périmètre est une somme de longueurs, et chaque longueur est multipliée par $k = 1,5$, donc leur somme aussi.

2.2. L'exercice du Brevet

★★★

Méthode. Modèles associés : **D1** (question a)) ; **D2** (question b)) ; **L1** (question c)).

a) On sait que les droites (AE) et (CD) sont parallèles, et que la droite (AB) les coupe en A et en C ; les angles $\widehat{CAE}$ et $\widehat{BCD}$ sont correspondants. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles correspondants qu'elles forment ont la même mesure.

Donc $\widehat{BCD} = \widehat{CAE}$. ■

☞ b) On sait que $\widehat{CAE} = \widehat{BCD}$, d'après la question a).

De même, les droites parallèles (CE) et (BD) sont coupées par la sécante (AB) en C et B respectivement. Les angles correspondants $\widehat{ACE}$ et $\widehat{CBD}$ ont donc la même mesure : $\widehat{ACE} = \widehat{CBD}$.

Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

Donc les triangles ACE et CBD sont semblables, les sommets homologues étant $A \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow B$ et $E \leftrightarrow D$. ■

☞ c) D'après la question b), $A \leftrightarrow C$, $C \leftrightarrow B$ et $E \leftrightarrow D$: les côtés homologues sont $[AC] \leftrightarrow [CB]$, $[AE] \leftrightarrow [CD]$ et $[CE] \leftrightarrow [BD]$. Le point C appartient au segment $[AB]$, donc $CB = AB - AC = 7,5 - 3 = 4,5$. Je range les côtés homologues dans un tableau :

côtés de CBD	$CB = 4,5$	$CD = 9$	$BD = 5,4$
côtés de ACE	$AC = 3$	$AE = ?$	$CE = ?$

Le rapport de similitude de CBD vers ACE est $k = \frac{AC}{CB} = \frac{3}{4,5} = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$ (réduction).

Pour aller vers le triangle ACE , je multiplie par k :

$$AE = \frac{2}{3} \times CD = \frac{2}{3} \times 9 = \frac{2 \times 9}{3} = \frac{18}{3} = \boxed{6}$$

$$CE = \frac{2}{3} \times BD = \frac{2}{3} \times 5,4 = \frac{2 \times 5,4}{3} = \frac{10,8}{3} = \boxed{3,6}$$

Les côtés du triangle ACE mesurent donc $AC = 3$, $AE = 6$ et $CE = 3,6$.

Vérification : $\frac{3}{4,5} = \frac{6}{9} = \frac{3,6}{5,4} = \frac{2}{3}$: les rapports sont égaux. Le rapport est strictement inférieur à 1, donc chaque côté de ACE doit être strictement plus court que son homologue dans CBD : c'est le cas, $3 < 4,5$, $6 < 9$ et $3,6 < 5,4$. ✓

Attention ! $[AB]$ n'est un côté d'aucun des deux triangles : le quotient $\frac{AC}{AB} = \frac{3}{7,5} = 0,4$ n'est pas le rapport de similitude.

2.3. Côtés homologues : deux configurations ☹

★★★☆

Méthode. Modèles associés : **D2** (questions a) et d)) ; **L1** (questions b), c), e) et f)).

☞ a) D'après l'énoncé, on sait que $\widehat{A} = \widehat{D}$.

De même, on sait que $\widehat{B} = \widehat{E}$.

Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

Donc les triangles ABC et DEF sont semblables, les sommets homologues étant $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ et $C \leftrightarrow F$. ■

☞ b) D'après la question a), $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ et $C \leftrightarrow F$: les côtés homologues sont $[AB] \leftrightarrow [DE]$, $[AC] \leftrightarrow [DF]$ et $[BC] \leftrightarrow [EF]$. Je range les côtés homologues dans un tableau :

côtés de ABC	$AB = 6$	$AC = 9$	$BC = 7,5$
côtés de DEF	$DE = 4$	$DF = ?$	$EF = ?$

Le rapport de similitude de ABC vers DEF est $k = \frac{DE}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (réduction).

☞ c) Pour aller vers le triangle DEF , je multiplie par k :

$$EF = \frac{2}{3} \times BC = \frac{2}{3} \times 7,5 = \frac{2 \times 7,5}{3} = \frac{15}{3} = \boxed{5}$$

$$DF = \frac{2}{3} \times AC = \frac{2}{3} \times 9 = \frac{2 \times 9}{3} = \frac{18}{3} = \boxed{6}$$

Vérification : $\frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{5}{7,5} = \frac{2}{3}$: les rapports sont égaux. Le rapport est strictement inférieur à 1, donc chaque côté de DEF doit être strictement plus court que son homologue dans ABC : c'est le cas, $4 < 6$, $6 < 9$ et $5 < 7,5$. ✓

☞ d) L'angle en A est commun aux triangles ADE et ACB (avec $D \in [AB]$ et $E \in [AC]$), donc $\widehat{DAE} = \widehat{CAB}$.

D'après l'énoncé, on sait de même que $\widehat{ADE} = \widehat{ACB}$.

Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

Donc les triangles ADE et ACB sont semblables, les sommets homologues étant $A \leftrightarrow A$, $D \leftrightarrow C$ et $E \leftrightarrow B$. ■

☞ e) D'après la question d), $A \leftrightarrow A$, $D \leftrightarrow C$ et $E \leftrightarrow B$: les côtés homologues sont $[AD] \leftrightarrow [AC]$, $[AE] \leftrightarrow [AB]$ et $[DE] \leftrightarrow [CB]$.

f) Je range les côtés homologues dans un tableau :

côtés de ACB	$AC = 10$	$AB = 8$	$CB = 7,5$
côtés de ADE	$AD = 4$	$AE = ?$	$DE = ?$

Le rapport de similitude de ACB vers ADE est $k = \frac{AD}{AC} = \frac{4}{10} = 0,4$ (réduction).

Pour aller vers le triangle ADE , je multiplie par k :

$$DE = 0,4 \times CB = 0,4 \times 7,5 = \boxed{3}$$

$$AE = 0,4 \times AB = 0,4 \times 8 = \boxed{3,2}$$

Vérification : $\frac{4}{10} = \frac{3,2}{8} = \frac{3}{7,5} = 0,4$: les rapports sont égaux. Le rapport est strictement inférieur à 1, donc chaque côté de ADE doit être strictement plus court que son homologue dans ACB : c'est le cas, $4 < 10$, $3,2 < 8$ et $3 < 7,5$. ✓

Attention ! En e), $[AD]$ est porté par $[AB]$ sur la figure, mais son homologue est $[AC]$: l'appariement suit les sommets homologues ($D \leftrightarrow C$), pas les supports. Naïm, dans l'exercice 5.1, commet la même faute : il apparie « à l'œil ».

2.4. Le triangle 3-4-5

★★☆☆

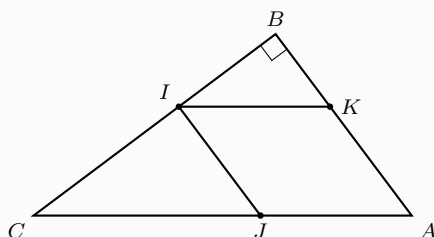
Méthode. Modèles associés : **J2** (question a)) ; **D2** (questions c) et d)) ; **L1** (questions c) et d)) ; **A2** (question e)).

a) Dans le triangle ABC , le plus grand côté est $[CA]$.

D'une part, $CA^2 = 5^2 = 25$. D'autre part, $AB^2 + BC^2 = 3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25$.

Ainsi $CA^2 = AB^2 + BC^2$. Or, si le carré du plus grand côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle, et l'angle droit est en face du plus grand côté (réciproque du théorème de Pythagore). Donc le triangle ABC est rectangle en B . ■

b) Je trace le segment $[CA]$ de longueur 5, puis je place au compas le point B tel que $AB = 3$ et $BC = 4$. Je place J sur $[CA]$ tel que $CJ = 3$. La parallèle à (AB) passant par J coupe (BC) en I ; la parallèle à (CA) passant par I coupe (AB) en K .



$CA = 5$, $AB = 3$, $BC = 4$
 $J \in [CA]$, $CJ = 3$
 $(JI) \parallel (AB)$, $(IK) \parallel (CA)$
 ABC rectangle en B

Attention ! En b), la figure se trace en vraie grandeur, à la règle et au compas, avec l'unité choisie : ici, une unité est représentée par 1 cm.

c) L'angle en C est commun aux triangles JIC et ABC (avec $J \in [CA]$ et $I \in [CB]$), donc $\widehat{JCI} = \widehat{ACB}$.

Les droites parallèles (JI) et (AB) sont coupées par la sécante (CA) en J et A respectivement. Les angles correspondants $\widehat{CJI}$ et $\widehat{CAB}$ ont donc la même mesure : $\widehat{CJI} = \widehat{CAB}$.

Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

Donc les triangles JIC et ABC sont semblables, les sommets homologues étant $J \leftrightarrow A$, $I \leftrightarrow B$ et $C \leftrightarrow C$. ■

D'après ce qui précède, $J \leftrightarrow A$, $I \leftrightarrow B$ et $C \leftrightarrow C$: les côtés homologues sont $[JI] \leftrightarrow [AB]$, $[JC] \leftrightarrow [AC]$ et $[IC] \leftrightarrow [BC]$.

Je range les côtés homologues dans un tableau :

côtés de ABC	$AB = 3$	$AC = 5$	$BC = 4$
côtés de JIC	$JI = ?$	$JC = 3$	$CI = ?$

Le rapport de similitude de ABC vers JIC est $k = \frac{JC}{AC} = \frac{3}{5} = \boxed{0,6}$ (réduction).

Pour aller vers le triangle JIC , je multiplie par k :

$$CI = 0,6 \times BC = 0,6 \times 4 = \boxed{2,4}$$

$$JI = 0,6 \times AB = 0,6 \times 3 = \boxed{1,8}$$

Vérification : $\frac{1,8}{3} = \frac{3}{5} = \frac{2,4}{4} = 0,6$: les rapports sont égaux. Le rapport est strictement inférieur à 1, donc chaque côté de JIC doit être strictement plus court que son homologue dans ABC : c'est le cas, $1,8 < 3$, $3 < 5$ et $2,4 < 4$. ✓

☞ d) Le point I appartient au segment $[CB]$, donc $BI = CB - CI = 4 - 2,4 = \boxed{1,6}$.

L'angle en B est commun aux triangles KBI et ABC (avec $K \in [BA]$ et $I \in [BC]$), donc $\widehat{KBI} = \widehat{ABC}$.

Les droites parallèles (IK) et (CA) sont coupées par la sécante (BC) en I et C respectivement. Les angles correspondants $\widehat{BIK}$ et $\widehat{BCA}$ ont donc la même mesure : $\widehat{BIK} = \widehat{BCA}$.

Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

Donc les triangles KBI et ABC sont semblables, les sommets homologues étant $K \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow B$ et $I \leftrightarrow C$. ■

D'après ce qui précède, $K \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow B$ et $I \leftrightarrow C$: les côtés homologues sont $[KB] \leftrightarrow [AB]$, $[KI] \leftrightarrow [AC]$ et $[BI] \leftrightarrow [BC]$.

Je range les côtés homologues dans un tableau :

côtés de ABC	$AB = 3$	$AC = 5$	$BC = 4$
côtés de KBI	$KB = ?$	$KI = ?$	$BI = 1,6$

Le rapport de similitude de ABC vers KBI est $k = \frac{BI}{BC} = \frac{1,6}{4} = \frac{16}{40} = 0,4$ (réduction).

Pour aller vers le triangle KBI , je multiplie par k :

$$KB = 0,4 \times AB = 0,4 \times 3 = \boxed{1,2}$$

$$KI = 0,4 \times AC = 0,4 \times 5 = \boxed{2}$$

Vérification : $\frac{1,2}{3} = \frac{2}{5} = \frac{1,6}{4} = 0,4$: les rapports sont égaux. Le rapport est strictement inférieur à 1, donc chaque côté de KBI doit être strictement plus court que son homologue dans ABC : c'est le cas, $1,2 < 3$, $2 < 5$ et $1,6 < 4$. ✓

☞ e) Les aires sont exprimées en unités d'aire.

Le triangle ABC est rectangle en B : son aire vaut $\frac{AB \times BC}{2} = \frac{3 \times 4}{2} = \boxed{6}$.

D'après la question d), de ABC vers KBI , les longueurs sont multipliées par 0,4.

Je cherche une aire : elle est multipliée par $0,4^2 = 0,16$.

$$6 \times 0,16 = 0,96.$$

Conclusion : l'aire du triangle KBI est $\boxed{0,96}$.

Vérification : $0,96 \div 0,16 = 6$. ✓

D'après la question c), de ABC vers JIC , les longueurs sont multipliées par 0,6.

Je cherche une aire : elle est multipliée par $0,6^2 = 0,36$.

$$6 \times 0,36 = 2,16.$$

Conclusion : l'aire du triangle JIC est $\boxed{2,16}$.

Vérification : $2,16 \div 0,36 = 6$. ✓

Le triangle ABC est formé du triangle JIC , du quadrilatère $AKIJ$ et du triangle KBI : l'aire du quadrilatère $AKIJ$ vaut $6 - 0,96 - 2,16 = \boxed{2,88}$.

Vérification : le quadrilatère $AKIJ$ a ses côtés opposés parallèles, $(JI) \parallel (AK)$ et $(IK) \parallel (JA)$: c'est un parallélogramme. Sa base $[AK]$ mesure $AB - KB = 3 - 1,2 = 1,8$, et la hauteur associée est la distance de I à la droite (AB) , c'est-à-dire $IB = 1,6$, car $(BC) \perp (AB)$: son aire vaut $1,8 \times 1,6 = 2,88$. ✓

2.5. Le papillon aux côtés proportionnels ☹

★★★☆

Méthode. Modèles associés : **D3** (question a)) ; **A2** (question b)).

☞ a) Les angles $\widehat{DAC}$ et $\widehat{BAE}$ sont opposés par le sommet (avec les droites (DE) et (BC) sécantes en A), donc $\widehat{DAC} = \widehat{BAE}$.

Les côtés qui encadrent ces angles mesurent $AD = 21$ mm et $AC = 72$ mm dans le triangle DAC , $AB = 28$ mm et $AE = 96$ mm dans le triangle BAE :

$$\frac{AB}{AD} = \frac{28}{21} = \frac{4}{3} \quad \frac{AE}{AC} = \frac{96}{72} = \frac{4}{3}$$

Les deux rapports sont égaux.

Or, si deux triangles ont un angle de même mesure compris entre deux côtés deux à deux proportionnels, alors ils sont semblables.

Donc les triangles DAC et BAE sont semblables, de rapport $k = \frac{4}{3}$ de DAC vers BAE (agrandissement), les sommets homologues étant $D \leftrightarrow B$, $A \leftrightarrow A$ et $C \leftrightarrow E$. ■

Le critère utilisé est le troisième critère. Une seule paire d'angles de même mesure est connue, et aucune droite parallèle ne permet d'en obtenir une seconde : la caractérisation angulaire ne peut pas conclure seule.

☞ b) D'après la question a), de DAC vers BAE , les longueurs sont multipliées par $\frac{4}{3}$.

Je cherche une aire : elle est multipliée par $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$.

Conclusion : le rapport des aires, de DAC vers BAE , est $\boxed{\frac{16}{9}}$; or $\frac{16}{9} > 1$, donc c'est le triangle BAE qui a la plus grande aire.

☞ c) Non.

Je suppose que les droites (DC) et (BE) sont parallèles.

Les points D et E sont de part et d'autre de la droite (BC) , car le segment $[DE]$ coupe cette droite en A : pour la sécante (BC) , les angles $\widehat{DCB}$ et $\widehat{EBC}$ sont alternes-internes. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes qu'elles forment ont la même mesure. Donc $\widehat{DCB} = \widehat{EBC}$. Le point A est entre B et C , donc $\widehat{DCB} = \widehat{DCA}$ et $\widehat{EBC} = \widehat{EBA}$ (ce sont les mêmes angles), d'où $\widehat{DCA} = \widehat{EBA}$.

D'après la question a), $C \leftrightarrow E$. Or, si deux triangles sont semblables, alors leurs angles homologues ont la même mesure. Donc $\widehat{DCA} = \widehat{BEA}$.

Des deux égalités, je déduis $\widehat{EBA} = \widehat{BEA}$: dans le triangle ABE , les angles en B et en E ont la même mesure. Or, si un triangle a deux angles de même mesure, alors il est isocèle, et ses deux côtés de même longueur partent du troisième sommet. Donc j'obtiens $AB = AE$. C'est impossible, car $AB = 28$ mm et $AE = 96$ mm : la supposition est fautive, et les droites (DC) et (BE) ne sont pas parallèles. ■

À retenir. Dans l'exercice 1.4, le parallélisme des ailes du papillon était une donnée et fournissait les angles ; ici, ce sont les longueurs qui donnent la similitude, et les ailes ne sont pas parallèles. Le raisonnement du c) (« je suppose que... », puis une contradiction) s'appelle un raisonnement par l'absurde.

2.5. Enrichissement facultatif

Correction détaillée : pourquoi l'angle doit-il être compris ?

A1. Utiliser l'ordre des points

Puisque C est entre A et H , on a $AH = AC + CH$. Donc $AC = 4 - 3 = 1$ cm. Puisque H est entre A et D , on a $AD = AH + HD = 4 + 3 = 7$ cm. L'ordre donné évite de choisir une addition ou une soustraction d'après l'apparence du dessin.

A2. Calculer les trois longueurs manquantes

Les triangles BHC et BHD sont rectangles en H , car C, H, D appartiennent à la droite (AD) et $(BH) \perp (AD)$. Dans chacun, le théorème de Pythagore donne :

$$BC^2 = BH^2 + HC^2 = 4^2 + 3^2 = 25, \quad BD^2 = BH^2 + HD^2 = 4^2 + 3^2 = 25.$$

Les longueurs étant positives, $BC = BD = 5$ cm. Le triangle BHA est lui aussi rectangle en H , donc

$$AB^2 = AH^2 + BH^2 = 4^2 + 4^2 = 32, \quad AB = \sqrt{32} \text{ cm.}$$

Comme $5^2 = 25 < 32 < 36 = 6^2$, on obtient $5 < \sqrt{32} < 6$. Cet encadrement exact suffira à comparer les côtés ; aucune décimale approchée n'est nécessaire.

A3. Justifier l'égalité des angles

Le triangle ABH est rectangle en H et isocèle, car $AH = BH$. Ses deux autres angles ont la même mesure et leur somme vaut 90° : chacun mesure donc 45° . Les points C, H, D sont sur la même demi-droite d'origine A : les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{BAH}$ et $\widehat{BAD}$ sont le même angle. Ils mesurent tous 45° .

B1. Ranger les côtés dans le même ordre

Pour ABC , on a $1 < 5 < \sqrt{32}$. Pour ABD , on a $5 < \sqrt{32} < 7$, puisque $\sqrt{32} < 6 < 7$.

Triangle	Plus petit côté	Côté intermédiaire	Plus grand côté
ABC	$AC = 1$	$BC = 5$	$AB = \sqrt{32}$
ABD	$BD = 5$	$AB = \sqrt{32}$	$AD = 7$

Les nombres sont les mesures en centimètres. Le côté $[AB]$, présent dans les deux triangles, n'a pas le même rang : il est le plus grand dans le premier et intermédiaire dans le second. Il ne faut donc pas apparier automatiquement un côté avec lui-même.

B2. Montrer que les côtés ne sont pas proportionnels

Si les triangles étaient semblables, le plus petit côté du premier correspondrait au plus petit du second. Le rapport de ABC vers ABD serait donc $5/1 = 5$ (agrandissement). Or les côtés intermédiaires donnent $\sqrt{32}/5$. On sait que $5 < \sqrt{32} < 6$; en divisant par le nombre positif 5 :

$$1 < \frac{\sqrt{32}}{5} < \frac{6}{5} = 1,2.$$

Ce quotient ne peut pas être égal à 5. Deux quotients sont différents : les longueurs des côtés ne sont pas proportionnelles. Les triangles ABC et ABD ne sont donc pas semblables.

B3. Identifier précisément l'hypothèse manquante

On a bien $AB/AB = 1$ et $BC/BD = 5/5 = 1$: les deux paires de côtés choisies sont proportionnelles. On a aussi $\widehat{BAC} = \widehat{BAD} = 45^\circ$. Mais les côtés $[AB]$ et $[BC]$ se rencontrent en B , de même que $[AB]$ et $[BD]$. L'angle connu est en A , pas en B : il n'est pas compris entre les côtés comparés.

La figure réfute l'affirmation : « Deux triangles qui ont deux paires de côtés proportionnels et une paire d'angles de même mesure sont nécessairement semblables. » Toutes ces données sont vérifiées, mais la conclusion a été réfutée en B2. Cela ne contredit pas le véritable critère CAC, dont une hypothèse manque ici.

C1. Réparer le critère

Pour comparer AB à AB et BC à BD , il faudrait l'égalité

$$\widehat{ABC} = \widehat{ABD}.$$

Ce sont les angles compris entre les côtés choisis. Avec cette donnée, le critère CAC assurerait la similitude de rapport 1 ; les triangles seraient alors égaux. Dans notre figure, cette égalité n'est pas vraie : elle conduirait notamment à $AC = AD$, alors que $1 \neq 7$.

C2. Réutiliser le critère avec les bonnes données

Dans la nouvelle situation,

$$\frac{EF}{AB} = \frac{FG}{BC} = 2 \quad \text{et} \quad \widehat{EFG} = \widehat{ABC}.$$

L'angle en F est bien compris entre $[EF]$ et $[FG]$, comme l'angle en B entre $[AB]$ et $[BC]$. Le critère CAC de similitude, admis à la partie 2.3 du cours, s'applique. Les correspondances sont $A \leftrightarrow E$, $B \leftrightarrow F$, $C \leftrightarrow G$. Le côté $[EG]$ correspond donc à $[AC]$:

$EG = 2AC = 2 \times 1 = 2 \text{ cm.}$

Le coefficient 2 s'applique aux trois côtés. La différence décisive avec le contre-exemple est la place de l'angle connu, et non le fait que le coefficient vaille 1 ou 2.

2.6. L'angle commun, le milieu et les aires

★★★☆☆

Méthode. Même famille que les exercices 2.3 (configuration 2) et 6.9 : angle commun + donnée codée $\rightarrow$ appariement croisé. Deux nouveautés : la donnée « I milieu » à transformer en longueur avant tout tableau, et la conclusion en aires (k^2).



- a) On sait que $\widehat{IAD} = \widehat{CAB}$ (angle commun en A , avec $I \in [AB]$ et $D \in [AC]$). On sait de même que $\widehat{AID} = \widehat{ACB}$ (donnée codée de l'énoncé). Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables. Donc les triangles AID et ACB sont semblables, avec $A \leftrightarrow A$, $I \leftrightarrow C$, $D \leftrightarrow B$. ■

Attention ! Appariement croisé : I (sur $[AB]$) correspond à C , et D (sur $[AC]$) correspond à B , les angles décident, pas les supports.



- b) I est le milieu de $[AB]$, donc $AI = AB \div 2 = 28 \div 2 = 14 \text{ mm}$. Côtés homologues : $[AI] \leftrightarrow [AC]$, $[AD] \leftrightarrow [AB]$, $[ID] \leftrightarrow [CB]$. Le rapport de réduction de ACB vers AID vaut

$$k = \frac{AI}{AC} = \frac{14}{42} = \frac{1}{3}.$$

Donc $AD = \frac{1}{3} \times AB = \frac{1}{3} \times 28 = \frac{28}{3} \text{ mm}$ et $ID = \frac{1}{3} \times CB = \frac{1}{3} \times 39 = \frac{39}{3} = 13 \text{ mm}$. Vérification : $\frac{14}{42} = \frac{28/3}{28} = \frac{13}{39} = \frac{1}{3} \checkmark$, et $AD = \frac{28}{3} \text{ mm} \approx 9,3 \text{ mm} < 42 \text{ mm}$: D est bien à l'intérieur de $[AC]$. $\checkmark$

- c) Le triangle AID est une réduction du triangle ACB de rapport $\frac{1}{3}$. Or, dans une réduction de rapport k , les aires sont multipliées par k^2 . Donc $\frac{\text{aire}(AID)}{\text{aire}(ABC)} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$. ■ (Les triangles ACB et ABC sont le même triangle : mêmes trois sommets.)

3. Agrandissements et réductions

3.1. Gammes : les effets de k , k^2 , k^3

★★☆☆☆

Méthode. Modèles associés : **A2** (questions a), b), c), e) et h)) ; **A3** (question d)) ; **A1** (questions f) et g)).



- a) Du triangle ABC vers le triangle AMN , les longueurs sont multipliées par 0,25. Je cherche un périmètre, qui est une longueur : il est multiplié par 0,25. Le périmètre du triangle ABC vaut $AB + AC + BC = 12 + 8 + 6 = 26 \text{ cm}$, et $26 \times 0,25 = 6,5$. Conclusion : le périmètre du triangle AMN est $6,5 \text{ cm}$. Vérification : $6,5 \div 0,25 = 26$. $\checkmark$



- b) Du triangle vers son agrandissement, les longueurs sont multipliées par 2. Je cherche une aire : elle est multipliée par $2^2 = 4$. $25 \times 4 = 100$. Conclusion : la nouvelle aire est 100 cm^2 . Vérification : $100 \div 4 = 25$. $\checkmark$



- c) Du cube vers la maquette, les longueurs sont multipliées par $\frac{1}{30}$, c'est-à-dire divisées par 30. Je cherche un volume : il est divisé par $30^3 = 27\,000$. $27\,000 \div 27\,000 = 1$. Conclusion : le volume de la maquette est 1 m^3 . Vérification : $1 \times 27\,000 = 27\,000$. $\checkmark$



- d) Le rapport des aires vaut 9 : c'est k^2 . Le nombre positif dont le carré vaut 9 est 3, car $3^2 = 9$. Le rapport de l'agrandissement est $k = 3$. Vérification : $3^2 = 9$. $\checkmark$



- e) Les longueurs sont multipliées par 5. Je cherche un volume : il est multiplié par $5^3 = 125$. Conclusion : le volume est multiplié par 125 .



- f) Les longueurs homologues sont 5,4 cm sur l'écran et 15 cm sur la photo imprimée ; elles sont dans la même unité. Le rapport de l'écran vers la photo imprimée est $k = \frac{15}{5,4} = \frac{150}{54} = \frac{25}{9}$. On a $k > 1$, donc c'est un agrandissement, de rapport $k = \frac{25}{9}$. La réponse exacte est C .

g) Une réduction a un rapport strictement compris entre 0 et 1.
 $120\% = 1,2 > 1$ et $\frac{4}{3} > 1$: ce sont des agrandissements. $0 < \frac{3}{4} < 1$: c'est une réduction.
 La réponse exacte est C.

h) De la figure vers son agrandissement, les longueurs sont multipliées par k .
 Une mesure d'angle est conservée dans un agrandissement ou une réduction.
Conclusion : les mesures d'angles sont multipliées par 1 : elles ne changent pas.

Attention ! En f), 2,7 et 2,8 ne sont que des valeurs approchées de k : $5,4 \times 2,7 = 14,58$ et $5,4 \times 2,8 = 15,12$, et non 15.

Application 3.1 bis : le fanion photographié ☆☆☆

Méthode. Modèles associés : **A1** (question a)) ; **A2** (question b)).

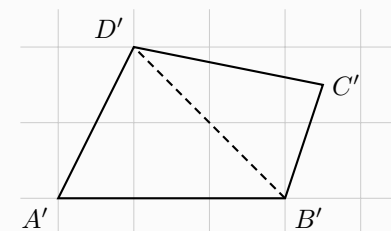
a) Les longueurs homologues sont 4 cm sur la photographie et 60 cm sur le vrai fanion ; elles sont dans la même unité.
 Le rapport de la photographie vers le vrai fanion est $k = \frac{60}{4} = 15$.
 On a $k > 1$, donc c'est un agrandissement, de rapport $k = 15$.

b) De la photographie vers le vrai fanion, les longueurs sont multipliées par 15.
 Je cherche une longueur : elle est multipliée par 15.
 $3 \times 15 = 45$.
Conclusion : le côté de 3 cm sur la photo mesure en réalité 45 cm.
Vérification : $45 \div 15 = 3$; et $3 < 4$ donne $45 < 60$: l'ordre des longueurs est conservé. ✓

3.2. Le quadrilatère : conjecturer avec k et k^2 ☆☆☆

Méthode. Modèle associé : **A2** (questions b) et d)).

a) Je divise chaque déplacement par 2. À partir de A' , je place B' à 3 carreaux à droite, C' à 3,5 carreaux à droite et 1,5 carreau au-dessus, puis D' à 1 carreau à droite et 2 carreaux au-dessus. Je relie ces quatre points dans cet ordre, puis je trace la diagonale $[B'D']$.



réduction de $ABCD$ de rapport 0,5 ;
carreaux de 1 cm

b) De $ABCD$ vers $A'B'C'D'$, les longueurs sont multipliées par 0,5.
 Une mesure d'angle est conservée dans un agrandissement ou une réduction.
Conclusion : l'angle $\widehat{D'A'B'}$ a la même mesure que l'angle $\widehat{DAB}$: $\widehat{D'A'B'} = \widehat{DAB}$.

c) Le triangle ABD a pour base $[AB]$, de longueur 6 cm, et pour hauteur associée la distance de D à la droite (AB) , lue sur le quadrillage : 4 cm.
 Son aire vaut $\frac{6 \times 4}{2} = 12 \text{ cm}^2$.
 Le triangle $A'B'D'$ a pour base $[A'B']$, de longueur 3 cm, et pour hauteur associée la distance de D' à la droite $(A'B')$, lue sur ma figure : 2 cm. Son aire vaut $\frac{3 \times 2}{2} = 3 \text{ cm}^2$.
 On a $3 = 12 \times 0,25$ et $0,25 = 0,5^2$, donc je complète : $\mathcal{A}' = \text{0,5}^2 \times \mathcal{A}$.

d) De $ABCD$ vers $A''B''C''D''$, les longueurs sont multipliées par 1,2.
 Je cherche une aire : elle est multipliée par $1,2^2 = 1,44$.
 D'après la question c), l'aire du triangle ABD est 12 cm^2 , et $12 \times 1,44 = 17,28$.
Conclusion : l'aire du triangle $A''B''D''$ est $17,28 \text{ cm}^2$.
Vérification : $17,28 \div 1,44 = 12$. ✓

e) « Dans un agrandissement ou une réduction de rapport k , les longueurs sont multipliées par k , les angles sont conservés, les aires sont multipliées par k^2 . »

3.3. Sens inverse : retrouver k

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **D2** (question a)) ; **A2** (questions a), c) et d)) ; **A3** (question b)) ; **V1** (question d)).

 **a)** L'angle en C est commun aux triangles CAB et $CA'B'$ (avec $A' \in [CA]$ et $B' \in [CB]$), donc $\widehat{ACB} = \widehat{A'CB'}$.

Les droites parallèles (AB) et $(A'B')$ sont coupées par la sécante (CA) en A et A' respectivement. Les angles correspondants $\widehat{CAB}$ et $\widehat{CA'B'}$ ont donc la même mesure : $\widehat{CAB} = \widehat{CA'B'}$.

Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

Donc les triangles CAB et $CA'B'$ sont semblables, les sommets homologues étant $C \leftrightarrow C$, $A \leftrightarrow A'$ et $B \leftrightarrow B'$. ■

De CAB vers $CA'B'$, les longueurs sont multipliées par $k = \frac{A'B'}{AB} = \frac{2}{1,5} = \frac{20}{15} = \frac{4}{3}$.

Je cherche une aire : elle est multipliée par $\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{16}{9}$.

$$2,7 \times \frac{16}{9} = \frac{2,7 \times 16}{9} = \frac{43,2}{9} = 4,8.$$

Conclusion : l'aire du triangle $CA'B'$ est $\boxed{4,8 \text{ cm}^2}$.

Vérification : $4,8 \div \frac{16}{9} = 4,8 \times \frac{9}{16} = \frac{4,8 \times 9}{16} = \frac{43,2}{16} = 2,7$. ✓

 **b)** Le rapport des aires vaut $\frac{1800}{72} = 25$: c'est k^2 .

Le nombre positif dont le carré vaut 25 est 5, car $5^2 = 25$.

Le rapport de l'agrandissement est $\boxed{k = 5}$.

Vérification : $72 \times 5^2 = 72 \times 25 = 1800$. ✓

 **c)** De $A'B'C'D'$ vers $ABCD$, les longueurs sont divisées par 1,25.

Je cherche une aire : elle est divisée par $1,25^2 = 1,5625$.

$$24 \div 1,5625 = 15,36.$$

Conclusion : l'aire du rectangle $ABCD$ est $\boxed{15,36 \text{ cm}^2}$.

Vérification : $15,36 \times 1,5625 = 24$. ✓

La réponse exacte est $\boxed{A}$.

 **d)** Du plan vers le terrain réel, les longueurs sont multipliées par 3 000.

Je cherche une aire : elle est multipliée par $3\,000^2 = 9\,000\,000$.

$$8 \times 9\,000\,000 = 72\,000\,000 \text{ cm}^2, \text{ et } 72\,000\,000 \text{ cm}^2 = 7\,200 \text{ m}^2, \text{ car } 1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2.$$

Conclusion : le terrain réel a une aire de $\boxed{7\,200 \text{ m}^2}$.

Vérification : $72\,000\,000 \div 9\,000\,000 = 8$. ✓

Un terrain de football mesure environ 105 m sur 68 m, soit environ $7\,100 \text{ m}^2$.

Une aire de $7\,200 \text{ m}^2$ est très proche de celle-ci : pour un terrain de football, le résultat est vraisemblable.

Attention ! En c), les autres réponses viennent d'erreurs de dimension ou de sens : $19,2 = 24 \div 1,25$ (diviser par k au lieu de k^2), $30 = 24 \times 1,25$ (multiplier par k) et $37,5 = 24 \times 1,5625$ (multiplier au lieu de diviser).

3.4. Arthur a-t-il raison ?

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **D2** (question a)) ; **A1** (question a)) ; **A2** (question b)).

 **a)** L'angle en A est commun aux triangles AMN et ABC (avec $M \in [AB]$ et $N \in [AC]$), donc $\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$.

Les droites parallèles (MN) et (BC) sont coupées par la sécante (AB) en M et B respectivement. Les angles correspondants $\widehat{AMN}$ et $\widehat{ABC}$ ont donc la même mesure : $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$.

Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

Donc les triangles AMN et ABC sont semblables, les sommets homologues étant $A \leftrightarrow A$, $M \leftrightarrow B$ et $N \leftrightarrow C$. ■

Les côtés homologues $[AB]$ et $[AM]$ joignent les sommets homologues $A \leftrightarrow A$ et $B \leftrightarrow M$.

$$\text{Le rapport de similitude de } ABC \text{ vers } AMN \text{ est } k = \frac{AM}{AB} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}.$$

On a $0 < k < 1$, donc le triangle AMN est une réduction du triangle ABC , de rapport $\boxed{k = \frac{1}{3}}$: Arthur a raison.

 **b)** D'après la question a), de ABC vers AMN , les longueurs sont multipliées par $\frac{1}{3}$.

Je cherche une aire : elle est multipliée par $\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$.

$$9 \times \frac{1}{9} = \frac{9 \times 1}{9} = \frac{9}{9} = 1.$$

Conclusion : l'aire du triangle AMN est $\boxed{1 \text{ cm}^2}$.

Vérification : $1 \div \frac{1}{9} = 1 \times 9 = 9$. ✓

3.5. La statue de la Liberté : regard critique

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **A1** (question a)) ; **V3** (question b)).

a) Les longueurs homologues sont 46 m pour la statue de New York et 11,50 m pour celle de Paris ; elles sont dans la même unité.

Le rapport de la statue de New York vers celle de Paris est $k = \frac{11,5}{46} = \frac{115}{460} = \frac{1}{4} = 0,25$.

On a $0 < k < 1$, donc c'est une réduction, de rapport $k = 0,25$.

b) De la statue de New York vers celle de Paris, les longueurs sont multipliées par $k = \frac{1}{4}$, comme le suppose l'énoncé.

Avec les mêmes matériaux aux mêmes endroits, la masse est proportionnelle au volume. Un volume est multiplié par $k^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$: la statue de Paris devrait avoir une masse de $225 \times \frac{1}{64} = \frac{225 \times 1}{64} = \frac{225}{64} = 3,515625$ t, soit environ 3,5 t.

La masse annoncée est 14 t, et $3,515625 \neq 14$.

Conclusion : les données ne sont pas compatibles avec une réduction de rapport $\frac{1}{4}$ qui garderait les mêmes matériaux.

Vérification : $3,515625 \times 64 = 225$. ✓

Non, je ne peux pas en déduire que les formes extérieures ne sont pas semblables : la masse dépend aussi de l'intérieur de la statue, l'épaisseur des parois et les matériaux, qui peuvent être différents dans la réplique ; l'énoncé ne permet pas de savoir ce qui a changé.

Attention ! L'erreur classique : $225 \div 4 = 56,25$ t, c'est multiplier la masse par k au lieu de k^3 .

3.6. Les cônes glacés

★★★★☆

Méthode. Modèles associés : **A2** (questions a) et c)) ; **V3** (question b)).

a) Du grand cône vers le cône moyen, les longueurs sont multipliées par $75\% = 0,75$.

Je cherche un volume : il est multiplié par $0,75^3 = 0,421875$.

$720 \times 0,421875 = 303,75$.

Conclusion : le cône moyen a un volume de 303,75 mL.

Vérification : $303,75 \div 0,421875 = 720$. ✓

b) Du grand cône vers le petit cône, les longueurs sont multipliées par $k = 50\% = 0,5$.

Un volume est multiplié par $k^3 = 0,5^3 = 0,125$: le volume du petit cône mesure $720 \times 0,125 = 90$ mL.

D'autre part, la moitié du volume du cône moyen vaut $303,75 \div 2 = 151,875$ mL. Or $90 \neq 151,875$, donc ce volume n'est pas la moitié de celui du cône moyen.

Conclusion : Marie a tort ; le petit cône a un volume de 90 mL.

Vérification : $90 \div 0,125 = 720$. ✓

c) Baisser de 25 %, c'est multiplier par $1 - 0,25 = 0,75$: les longueurs sont multipliées par 0,75.

Je cherche un volume : il est multiplié par $0,75^3 = 0,421875$.

Conclusion : le volume est multiplié par 0,421875.

Le volume baisse donc de $1 - 0,421875 = 0,578125$, c'est-à-dire de 57,8125 %, soit environ 58 %.

Morale : une baisse de 25 % des longueurs fait baisser le volume d'environ 58 % : le volume baisse beaucoup plus que les longueurs.

Attention ! Du cône moyen vers le petit, les longueurs sont multipliées par $\frac{0,5}{0,75} = \frac{2}{3}$, donc le volume par $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$, environ 0,3 : bien moins que la moitié.

3.7. Doubler un cube : le problème de Délos

★★★☆☆



a) Volume du cube de départ : $V = 10^3 = 1\,000 \text{ cm}^3$.

b) Cube d'arête 20 cm : $V' = 20^3 = 8\,000 \text{ cm}^3$. Ce n'est pas le double : c'est huit fois le volume de départ. En doublant l'arête, on multiplie le volume par $2^3 = 8$. Léa a tort.

c) Pour multiplier le volume par 2, il faut $k^3 = 2$, donc $k = \sqrt[3]{2} \approx 1,26$. L'arête cherchée vaut $10 \times \sqrt[3]{2} \approx 10 \times 1,26 = 12,6 \text{ cm}$.

d) Vérification : $12,6^3 = 2\,000,376 \text{ cm}^3 \approx 2\,000 \text{ cm}^3$, soit bien environ le double de $1\,000 \text{ cm}^3$. ✓

À retenir. Doubler un volume, ce n'est pas doubler les longueurs : l'arête n'est multipliée que par $\sqrt[3]{2} \approx 1,26$ (un agrandissement d'environ 26 %). C'est le problème grec de la duplication du cube : impossible à réaliser à la règle et au compas, mais facile à calculer.

3.8. Scratch : deux triangles de même forme

★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **A1** (questions c) et e)) ; **R1** (question d)) ; **A2** (questions d) et e)).

a) Je complète le script : « répéter fois » et « tourner de degrés vers la droite ».

b) Le triangle se ferme : les trois rotations font un tour complet, $3 \times 120^\circ = 360^\circ$, et les trois côtés ont la même longueur, donc le lutin revient à son point de départ. À chaque sommet, le lutin tourne de l'angle extérieur ; l'angle intérieur vaut $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$. Avec des rotations de 60° , trois côtés ne referment pas le triangle : le lutin ne tourne en tout que de $3 \times 60^\circ = 180^\circ$.

c) Les longueurs homologues sont 60 pas dans le premier triangle et 90 pas dans le second ; elles sont dans la même unité.

Le rapport du premier triangle vers le second est $k = \frac{90}{60} = 1,5$.

On a $k > 1$, donc c'est un agrandissement, de rapport .

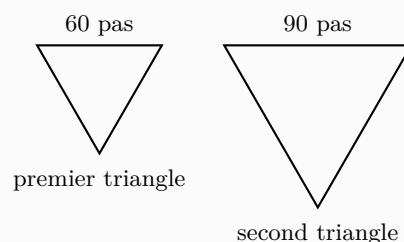
J'exécute le script : stylo relevé, le lutin rejoint le point de départ du second triangle, s'oriente à 90° et reprend la même boucle ; il trace un triangle équilatéral de côté 90 pas, sans aucun trait entre les deux figures.

La prévision est juste : les côtés du second triangle mesurent 90 pas, et $1,5 \times 60 = 90$.

d) Le premier triangle, de côtés 60 pas, est équilatéral : ses trois angles ont la même mesure et valent chacun $180^\circ \div 3 = 60^\circ$. Le second triangle, de côtés 90 pas, est équilatéral : ses trois angles ont la même mesure et valent chacun $180^\circ \div 3 = 60^\circ$.

Les angles du premier triangle sont 60° , 60° et 60° ; ceux du second sont 60° , 60° et 60° .

Les deux triangles ont des angles deux à deux de même mesure : d'après la caractérisation angulaire, ils sont .



Le périmètre du premier triangle vaut $60 + 60 + 60 = \text{180 pas}$; celui du second vaut $90 + 90 + 90 = \text{270 pas}$.

D'après la question c), du premier triangle vers le second, les longueurs sont multipliées par 1,5.

Je cherche une aire : elle est multipliée par $1,5^2 = 2,25$.

Conclusion : l'aire est multipliée par .

e) Les longueurs homologues sont 60 pas dans le premier triangle et 30 pas dans le second ; elles sont dans la même unité.

Le rapport du premier triangle vers le second est $k = \frac{30}{60} = 0,5$.

On a $0 < k < 1$, donc c'est une réduction, de rapport $k = 0,5$.

Du premier triangle vers le second, les longueurs sont multipliées par 0,5.

Je cherche un périmètre, qui est une longueur : il est multiplié par 0,5. Une mesure d'angle est conservée dans un agrandissement ou une réduction.

Je cherche une aire : elle est multipliée par $0,5^2 = 0,25$.

$180 \times 0,5 = 90$: le périmètre du second triangle vaut 90 pas.

Conclusion : par rapport au premier triangle, les longueurs et le périmètre du second sont multipliés par , les mesures d'angles par (elles ne changent pas) et l'aire par .

Vérification : $90 \div 0,5 = 180$; en lançant le script, j'obtiens un triangle de côtés 30 pas, de périmètre $30 + 30 + 30 = 90$ pas. ✓

À retenir. Multiplier toutes les longueurs par le même nombre en gardant les angles conserve la forme. Modifier les rotations ne donne pas, en général, un triangle semblable.

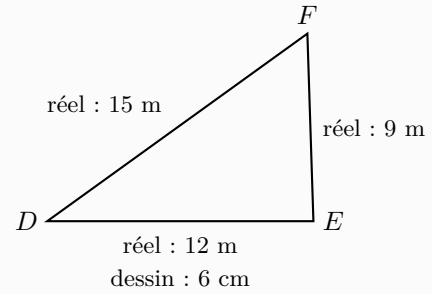
4. Problèmes

4.1. Le parc triangulaire à l'échelle

★★★☆

Méthode. Modèles associés : **A1** (question b)) ; **A2** (questions c) et e)) ; **J2** (question d)) ; **V1** (question e)).

a) Je ne code pas l'angle droit : il n'est pas encore démontré.



b) Les longueurs homologues sont 12 m en réalité et 6 cm sur le dessin ; dans la même unité, 12 m = 1 200 cm.

Le rapport du réel vers le dessin est $k = \frac{6}{1\,200} = \frac{1}{200}$.

On a $0 < k < 1$, donc c'est une réduction : l'échelle du dessin est $\frac{1}{200}$.

c) Du réel vers le dessin, les longueurs sont multipliées par $\frac{1}{200}$, c'est-à-dire divisées par 200.

Je cherche une longueur : elle est divisée par 200.

$9 \div 200 = 0,045$ m, et $0,045$ m = 4,5 cm.

Conclusion : sur le dessin, EF mesure $\boxed{4,5 \text{ cm}}$.

Vérification : $0,045 \times 200 = 9$. ✓

Du réel vers le dessin, les longueurs sont divisées par 200.

Je cherche une longueur : elle est divisée par 200.

$15 \div 200 = 0,075$ m, et $0,075$ m = 7,5 cm.

Conclusion : sur le dessin, DF mesure $\boxed{7,5 \text{ cm}}$.

Vérification : $0,075 \times 200 = 15$. ✓

d) Dans le triangle DEF, le plus grand côté est [DF].

D'une part, $DF^2 = 15^2 = 225$. D'autre part, $DE^2 + EF^2 = 12^2 + 9^2 = 144 + 81 = 225$.

Ainsi $DF^2 = DE^2 + EF^2$. Or, si le carré du plus grand côté d'un triangle est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, alors ce triangle est rectangle, et l'angle droit est en face du plus grand côté (réciproque du théorème de Pythagore). Donc le triangle DEF est rectangle en E. ■

Le triangle DEF est rectangle en E : son aire réelle vaut $\frac{DE \times EF}{2} = \frac{12 \times 9}{2} = \boxed{54 \text{ m}^2}$.

e) À l'échelle $\frac{1}{200}$, les longueurs sont divisées par 200 ; une aire est divisée par $200^2 = 40\,000$.

L'aire du triangle dessiné est donc 40 000 fois plus petite que l'aire réelle, et non 200 fois : la réponse est non.

Du réel vers le dessin, les longueurs sont divisées par 200.

Je cherche une aire : elle est divisée par $200^2 = 40\,000$.

$54 \div 40\,000 = 0,001\,35 \text{ m}^2$, et $0,001\,35 \text{ m}^2 = 13,5 \text{ cm}^2$, car $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$.

Conclusion : le triangle dessiné a une aire de $\boxed{13,5 \text{ cm}^2}$.

Vérification : $0,001\,35 \times 40\,000 = 54$. ✓

Le calcul direct donne le même résultat : le triangle dessiné est rectangle en E, comme le parc, et son aire vaut $\frac{6 \times 4,5}{2} = 13,5 \text{ cm}^2$.

4.2. La maquette d'avion au 1/125

★★★☆

Méthode. Modèles associés : **A2** (questions a), b) et c)) ; **V1** (question d)).

a) De l'avion vers la maquette, les longueurs sont multipliées par $\frac{1}{125}$, c'est-à-dire divisées par 125.

Je cherche une longueur : elle est divisée par 125.

$73 \div 125 = 0,584$ m, et $0,584$ m = 58,4 cm.

Conclusion : la maquette mesure $\boxed{58,4 \text{ cm}}$ de long.

Vérification : $0,584 \times 125 = 73$. ✓

b) De la maquette vers l'avion, les longueurs sont multipliées par 125.

Je cherche une aire : elle est multipliée par $125^2 = 15\,625$.

$540,8 \times 15\,625 = 8\,450\,000 \text{ cm}^2$, et $8\,450\,000 \text{ cm}^2 = 845 \text{ m}^2$, car $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$.

Conclusion : la voilure de l'avion a une aire de $\boxed{845 \text{ m}^2}$.

Vérification : $8\,450\,000 \div 15\,625 = 540,8$. ✓

c) De l'avion vers la maquette, les longueurs sont divisées par 125.

Je cherche un volume : il est divisé par $125^3 = 1\,953\,125$.

$310\,000 \div 1\,953\,125 = 0,158\,72$ L, et $0,158\,72$ L = $158,72$ cm³, car 1 L = 1 000 cm³.

Conclusion : le réservoir de la maquette a une capacité de $158,72$ cm³.

Vérification : $0,158\,72 \times 1\,953\,125 = 310\,000$. ✓

d) Question a) : Une feuille A4 mesure environ 30 cm de long.

Une maquette de 58,4 cm, à peu près deux feuilles A4 mises bout à bout, se pose sur une table : pour la maquette d'un avion, le résultat est vraisemblable.

Question b) : Un terrain de handball mesure 40 m sur 20 m, soit 800 m².

Une voile de 845 m², un peu plus grande qu'un terrain de handball, porte un avion de 73 m de long : pour un très gros porteur, le résultat est vraisemblable.

Question c) : Un verre d'eau contient environ 200 mL, c'est-à-dire 200 cm³.

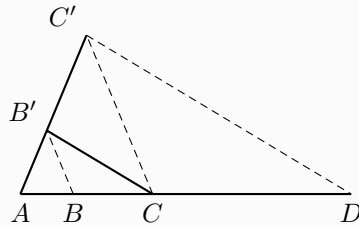
Un réservoir de 158,72 cm³, un peu moins qu'un verre d'eau, tient dans une maquette de 58,4 cm : pour le réservoir d'une maquette, le résultat est vraisemblable.

Attention ! En b), multiplier par 125 au lieu de 125^2 donnerait $540,8 \times 125 = 67\,600$ cm², soit 6,76 m² : une voile de moins de 7 m² pour un avion de 73 m de long est invraisemblable.

4.3. La cascade de parallèles

★★★★

a) Voici une construction possible.



b) Dans les triangles ABB' et ACC' , l'angle en A est commun ($\widehat{BAB'} = \widehat{CAC'}$), et $\widehat{ABB'} = \widehat{ACC'}$ (angles correspondants formés par les parallèles (BB') et (CC') coupées par la sécante (AC)). Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables. Donc ABB' et ACC' sont semblables ($A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$, $B' \leftrightarrow C'$), et les longueurs de leurs côtés homologues sont proportionnelles :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'}.$$

c) De même, dans les triangles $AB'C$ et $AC'D$, l'angle en A est commun ($\widehat{B'AC} = \widehat{C'AD}$), et $\widehat{AB'C} = \widehat{AC'D}$ (angles correspondants formés par les parallèles ($B'C$) et ($C'D$) coupées par la sécante (AC')). Ils sont donc semblables ($A \leftrightarrow A$, $B' \leftrightarrow C'$, $C \leftrightarrow D$), d'où

$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{AC}{AD}.$$

d) Des deux égalités précédentes, on déduit $\frac{AB}{AC} = \frac{AB'}{AC'} = \frac{AC}{AD}$, donc $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD}$. ■

e) Avec $AB = 1$ et $AC = x$, on obtient $\frac{1}{x} = \frac{x}{AD}$, d'où (par l'égalité des produits en croix) $AD = x \times x = \boxed{x^2}$. Pour obtenir x^3 , on prolonge la cascade d'un cran (parallèle à (CC') passant par D , qui coupe (AB') en D' , puis parallèle à ($C'D$) passant par D' , qui coupe (AC) en E) : le même raisonnement donne $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{AE}$, soit $\frac{1}{x} = \frac{x^2}{AE}$, d'où $AE = x \times x^2 = \boxed{x^3}$. La figure « multiplie par x » à chaque étage.

4.4. Les deux poteaux 🏗️

★★★☆

Méthode. Deux fois le motif « angle commun + angle droit » (dans des triangles emboîtés : les trois poteaux sont parallèles), et une astuce de conclusion : additionner les deux égalités pour faire apparaître $KL + LH = KH$.



- a) Les droites (AH) , (CL) et (BK) sont toutes les trois perpendiculaires à la droite (HK) : les poteaux sont verticaux sur un sol horizontal, et $(CL) \perp (HK)$ par définition de L . Or, si deux droites sont perpendiculaires à une même droite, alors elles sont parallèles entre elles. Donc $(AH) \parallel (CL) \parallel (BK)$. ■
- b) Dans les triangles KLC et KHA , on a $\widehat{LKC} = \widehat{HKA}$ (angle commun en K , car $L \in [HK]$ et $C \in [AK]$), et $\widehat{KLC} = \widehat{KHA} = 90^\circ$. Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables. Donc les triangles KLC et KHA sont semblables ($K \leftrightarrow K$, $L \leftrightarrow H$, $C \leftrightarrow A$), d'où $\frac{CL}{AH} = \frac{KL}{KH}$, c'est-à-dire $\frac{CL}{3} = \frac{KL}{KH}$. ■
- c) De même, dans les triangles HLC et HKB , l'angle en H est commun ($\widehat{LHC} = \widehat{KHB}$) et $\widehat{HLC} = \widehat{HKB} = 90^\circ$: ils sont donc semblables ($H \leftrightarrow H$, $L \leftrightarrow K$, $C \leftrightarrow B$), d'où $\frac{CL}{BK} = \frac{HL}{HK}$, c'est-à-dire $\frac{CL}{2} = \frac{HL}{HK}$. ■
- d) En additionnant les deux égalités :

$$\frac{CL}{3} + \frac{CL}{2} = \frac{KL}{KH} + \frac{HL}{HK} = \frac{KL + LH}{HK} = \frac{HK}{HK} = 1$$

(car L appartient au segment $[HK]$). Donc $CL \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) = 1$, soit $CL \times \left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6}\right) = CL \times \frac{5}{6} = 1$, d'où

$$CL = \frac{6}{5} = \boxed{1,20 \text{ m}}.$$

Vérification : $1,20 < 2 < 3$: le croisement est bien plus bas que les deux sommets ✓, et $\frac{1,20}{3} + \frac{1,20}{2} = 0,4 + 0,6 = 1$. ✓

- e) La distance HK entre les poteaux n'intervient pas dans le calcul : la hauteur CL du croisement n'en dépend pas. Rapprocher ou écarter les poteaux ne change rien à CL (seul le point L se déplace).

À retenir. Le résultat général, superbe : $\frac{1}{CL} = \frac{1}{AH} + \frac{1}{BK}$ (diviser l'égalité $\frac{CL}{AH} + \frac{CL}{BK} = 1$ par CL). Les physiciens la retrouveront en 2^{de} et au lycée (résistances en parallèle, lentilles) : on dit que CL est la moitié de la moyenne harmonique de AH et BK .

4.4. Enrichissement facultatif 🏗️

Correction détaillée : choisir les poteaux

A1. Reprendre la géométrie avant de calculer

Les trois droites (AH) , (CL) et (BK) sont perpendiculaires au sol (HK) ; elles sont donc parallèles. Les triangles KLC et KHA ont un angle commun en K et un angle droit respectivement en L et en H . Ils sont semblables, avec $K \leftrightarrow K$, $L \leftrightarrow H$, $C \leftrightarrow A$. On obtient

$$\frac{CL}{AH} = \frac{KL}{KH}, \quad \text{soit} \quad \frac{h}{a} = \frac{KL}{KH}.$$

De même, HLC et HKB ont le même angle en H et sont rectangles respectivement en L et en K . Leurs côtés homologues donnent $h/b = HL/HK$.

Le point L est entre H et K , donc $KL + LH = KH$. Les dénominateurs HK et KH représentent la même longueur. En additionnant :

$$\frac{h}{a} + \frac{h}{b} = \frac{KL + LH}{HK} = 1.$$

Le croisement est au-dessus du sol, donc $h > 0$: diviser par h est autorisé. Puisque $(h/a)/h = 1/a$, on obtient

$$\boxed{\frac{1}{h} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}}.$$

Cette relation vient des triangles semblables. Elle n'exige pas de connaître l'écartement HK .

A2. Vérifier un premier choix

Avec $a = 3$ et $b = 6$:

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

Les deux nombres positifs qui ont le même inverse sont égaux : $h = 2$. Le croisement est donc à 2 m. Tout écartement strictement positif des pieds donne la même hauteur, puisque la relation ne dépend que de a et de b .

A3. Une première contrainte géométrique

Dans $1/h = 1/a + 1/b$, le terme $1/b$ est strictement positif. Ainsi $1/h > 1/a$. Pour des nombres positifs, prendre l'inverse renverse l'ordre : $h < a$. De même, $1/a > 0$ entraîne $1/h > 1/b$, donc $h < b$. Le point de croisement est donc strictement plus bas que chacun des deux sommets, comme le suggère la figure. L'égalité avec la hauteur d'un poteau est exclue tant que l'autre poteau a une hauteur positive finie.

B1. Exclure les poteaux trop petits

On impose $h = 2$. La question A3 donne $2 < a$ et $2 < b$. Comme a est un entier, sa première valeur possible est 3. Les valeurs 1 et 2 ne conviennent pas ; le croisement ne peut pas être aussi haut que le sommet du plus petit poteau.

B2. Exclure toutes les grandes valeurs à la fois

On a choisi $a \leq b$. Si $a \geq 5$, alors $b \geq 5$ également. Par comparaison des inverses :

$$\frac{1}{a} \leq \frac{1}{5}, \quad \frac{1}{b} \leq \frac{1}{5}, \quad \text{donc} \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{5}.$$

Mais il faudrait $1/a + 1/b = 1/2$, et $2/5 < 1/2$ puisque $4/10 < 5/10$. C'est impossible. Toutes les valeurs $a \geq 5$ sont exclues par le même raisonnement, sans avoir à les tester une par une. Avec B1, il ne reste que $a = 3$ ou $a = 4$.

B3. Traiter tous les cas restants

Dans la relation $1/a + 1/b = 1/2$, on soustrait $1/a$ de chaque côté :

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{2} - \frac{1}{a}.$$

Le tableau donne ensuite l'inverse de b , puis b lui-même :

a	$1/b$	b	Contraintes
3	$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$	6	entier, $6 \geq 3$
4	$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	4	entier, $4 \geq 4$

Il faut bien inverser la dernière fraction : $1/b = 1/6$ donne $b = 6$, et non $b = 1/6$.

B4. Vérifier la suffisance et l'exhaustivité

Les deux choix conviennent : $1/3 + 1/6 = 1/2$ et $1/4 + 1/4 = 1/2$. Pour les câbles reliant les deux poteaux choisis, A1 donne donc $1/h = 1/2$, soit $h = 2$: ce sont bien des solutions du problème géométrique, pas seulement des valeurs sorties d'un tableau.

Réciproquement, toute solution peut être rangée avec $a \leq b$. B1 et B2 imposent alors $a = 3$ ou 4 , et B3 détermine dans chaque cas une unique valeur de b . Il n'existe donc aucun autre choix :

$$(a; b) = (3; 6) \quad \text{ou} \quad (4; 4).$$

Les hauteurs sont en mètres. Le choix $(6; 3)$ est le même que $(3; 6)$ avec les poteaux échangés : il n'est pas compté une deuxième fois.

C1. Recommencer la recherche avec $h = 3$

La condition est désormais $1/a + 1/b = 1/3$. D'après A3, $a > 3$, donc $a \geq 4$. Si $a \geq 7$, alors $b \geq 7$ et

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \leq \frac{2}{7} < \frac{1}{3} \quad \text{car} \quad \frac{2}{7} = \frac{6}{21} < \frac{7}{21} = \frac{1}{3}.$$

Il ne reste que $a = 4, 5$ ou 6 . Pour chacun, $1/b = 1/3 - 1/a$:

a	$1/b$	b	Décision
4	$\frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$	12	convient : entier et $12 \geq 4$
5	$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$	$\frac{15}{2} = 7,5$	refusé : hauteur non entière
6	$\frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$	6	convient : entier et $6 \geq 6$

Avec des poteaux de 5 m et 7,5 m, la hauteur serait bien 3 m, mais la contrainte de hauteurs entières ne serait pas satisfaite. Il faut vérifier toutes les conditions, pas seulement l'équation.

On vérifie $1/4 + 1/12 = 1/3$ et $1/6 + 1/6 = 1/3$: chaque paire retenue donne bien $h = 3$. Les bornes précédentes et le tableau ont couvert toutes les valeurs possibles du plus petit poteau. Les choix sont donc exactement

$$(a; b) = (4; 12) \quad \text{ou} \quad (6; 6).$$

C2. Distinguer deux critères de choix

Le plus grand poteau mesure 12 m avec $(4; 12)$, contre 6 m avec $(6; 6)$. Pour rendre le plus grand poteau aussi peu haut que possible, il faut choisir deux poteaux de 6 m.

Ce n'est pas le choix qui utilise le plus petit poteau possible : ce dernier mesure 4 m dans la paire $(4; 12)$. Réduire au maximum le petit poteau force ici à augmenter l'autre. Le meilleur choix dépend donc du critère fixé, et l'énumération complète permet de le justifier.

Méthode. Modèle associé : **J1**. Deux fois le même motif : « angle commun en B + angle droit », la configuration des hauteurs de la partie 3.3, puis une élimination : chacune des deux similitudes exprime le même produit $BE \times BA$; en les égalant, AB disparaît. C'est le calcul en lettres jusqu'au bout qui rend cela visible.

- a) Dans les triangles ABC et CBE , on a $\widehat{ABC} = \widehat{CBE}$ (angle commun en B , car $E \in [AB]$), et $\widehat{ACB} = \widehat{CEB} = 90^\circ$ (ABC est rectangle en C , et (CE) est la hauteur issue de C donc $(CE) \perp (AB)$). Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables. Donc ABC et CBE sont semblables, avec $A \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow B$, $C \leftrightarrow E$. D'où $\frac{AB}{CB} = \frac{BC}{BE} = \frac{AC}{CE}$, et l'égalité des produits en croix sur la première égalité donne $BC^2 = BE \times BA$. ■
- b) Dans les triangles ABD et FBE , on a $\widehat{ABD} = \widehat{FBE}$ (c'est le même angle : $F \in [BD]$ et $E \in [BA]$, avec $E \neq B$ et $F \neq B$), et $\widehat{ADB} = \widehat{FEB} = 90^\circ$ (ABD est rectangle en D , et $F \in [CE]$ avec $(CE) \perp (AB)$). Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables. Donc ABD et FBE sont semblables, avec $A \leftrightarrow F$, $B \leftrightarrow B$, $D \leftrightarrow E$. D'où $\frac{AB}{FB} = \frac{BD}{BE}$, et l'égalité des produits en croix donne $BF \times BD = BE \times BA$. ■
- c) Les questions a) et b) donnent deux expressions du même produit $BE \times BA$:

$$BF \times BD = BC^2 \quad \text{donc} \quad BF = \frac{BC^2}{BD} = \frac{4^2}{6} = \frac{16}{6} = \boxed{\frac{8}{3}}.$$

- Vérification : $\frac{8}{3} \approx 2,7 < 6 = BD : F$ est bien entre B et D . ✓
- d) Rien ne change : $BF = \frac{BC^2}{BD} = \frac{8}{3}$ ne dépend pas de AB . Si AB grandit, les points E et F se déplacent, mais BF reste égal à $\frac{8}{3}$: la donnée « attendue » AB n'était pas nécessaire. C'est la formule littérale finale qui le révèle.

5. Justifier et raisonner

5.1. Repérer l'erreur : la copie de Naïm

Méthode. Modèles associés : **V2** (question a)) ; **L1** (question b)).

- a) Je relis la copie dans l'ordre des étapes : Naïm calcule un rapport sans avoir apparié les côtés. L'erreur est à l'étape « apparier » : Naïm a rapproché BC et DE parce qu'ils mesurent tous deux 6, mais ils ne sont pas homologues. Or les côtés homologues joignent des sommets homologues : avec $A \leftrightarrow D$ et $B \leftrightarrow E$, l'homologue de $[DE]$ est $[AB]$, et celui de $[BC]$ est $[EF]$.
- b) Les angles donnent $A \leftrightarrow D$ et $B \leftrightarrow E$, donc aussi $C \leftrightarrow F$, les troisièmes angles : les côtés homologues sont $[AB] \leftrightarrow [DE]$, $[AC] \leftrightarrow [DF]$ et $[BC] \leftrightarrow [EF]$. Je range les côtés homologues dans un tableau :

côtés de ABC	$AB = 4$	AC	$BC = 6$
côtés de DEF	$DE = 6$	DF	$EF = ?$

Le rapport de similitude de ABC vers DEF est $k = \frac{DE}{AB} = \frac{6}{4} = 1,5$ (agrandissement). Pour aller vers le triangle DEF , je multiplie par k : $EF = 1,5 \times BC = 1,5 \times 6 = \boxed{9}$.
Vérification : $\frac{6}{4} = \frac{9}{6} = 1,5$: les rapports sont égaux. Le rapport est strictement supérieur à 1, donc chaque côté de DEF doit être strictement plus long que son homologue dans ABC : c'est le cas, $6 > 4$ et $9 > 6$. ✓

Attention ! Naïm conclut aussi que les triangles sont égaux. Deux triangles semblables ne sont égaux que si leur rapport de similitude vaut 1 ; ici, il vaut 1,5.

5.2. Contrôler la cohérence : sans calculer

Méthode. Modèle associé : **V1**.

- a) Dans un agrandissement de rapport 3, les aires sont multipliées par $3^2 = 9$. L'aire ne peut donc pas avoir été multipliée par 6 : l'affirmation est fausse.
- b) Dans une réduction, le rapport est strictement compris entre 0 et 1 : toutes les longueurs raccourcissent. Un côté de 8 cm ne peut donc pas devenir un côté de 16 cm, plus long : l'affirmation est fausse.
- c) Dans un triangle, le plus grand côté est en face du plus grand angle ; dans un triangle qui n'est pas équilatéral, le plus grand angle est strictement plus grand que le plus petit. Dans le second triangle, le plus grand côté ne peut donc pas être en face du plus petit angle : l'affirmation est fausse.
- d) À l'échelle $\frac{1}{100}$, les longueurs sont divisées par 100 ; une surface est une aire, elle est divisée par $100^2 = 10\,000$. La surface de peinture de la maquette est donc 10 000 fois plus petite que celle de l'objet réel, et non 100 fois : l'affirmation est fausse.

Méthode. Modèles associés : **D2** (question a)) ; **L1** (questions b) et c), puis 1. et 3. de l'encadré).

a) Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont opposés par le sommet (avec les droites (AC) et (BD) sécantes en O), donc $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$.

D'après l'énoncé, on sait que $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$.

Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

Donc les triangles OAB et OCD sont semblables, les sommets homologues étant $O \leftrightarrow O$, $A \leftrightarrow C$ et $B \leftrightarrow D$. ■

b) D'après la question a), $O \leftrightarrow O$, $A \leftrightarrow C$ et $B \leftrightarrow D$: les côtés homologues sont $[OA] \leftrightarrow [OC]$, $[OB] \leftrightarrow [OD]$ et $[AB] \leftrightarrow [CD]$.

Je range les côtés homologues dans un tableau :

côtés de OAB	$OA = 6$	$OB = 5,4$	$AB = ?$
côtés de OCD	$OC = 4$	$OD = ?$	$CD = 5$

Le rapport de similitude de OAB vers OCD est $k = \frac{OC}{OA} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (réduction).

Pour aller vers le triangle OCD , je multiplie par k : $OD = \frac{2}{3} \times OB = \frac{2}{3} \times 5,4 = \frac{2 \times 5,4}{3} = \frac{10,8}{3} = \boxed{3,6}$.

Pour revenir vers le triangle OAB , je divise par k ; diviser par $\frac{2}{3}$, c'est multiplier par son inverse $\frac{3}{2}$: $AB = CD \div \frac{2}{3} = 5 \times \frac{3}{2} = \frac{5 \times 3}{2} = \frac{15}{2} = \boxed{7,5}$.

c) Vérification : $\frac{4}{6} = \frac{3,6}{5,4} = \frac{5}{7,5} = \frac{2}{3}$: les rapports sont égaux. Le rapport est strictement inférieur à 1, donc chaque côté de OCD doit être strictement plus court que son homologue dans OAB : c'est le cas, $4 < 6$, $3,6 < 5,4$ et $5 < 7,5$. ✓

Conclusion : les triangles OAB et OCD sont semblables, de rapport $\frac{2}{3}$ de OAB vers OCD (réduction), et les longueurs cherchées sont $OD = \boxed{3,6}$ et $AB = \boxed{7,5}$.

1. Avec cette donnée, le rapport $k = \frac{OC}{OA}$ devient plus petit, car OC passe de 4 à 3 et OA ne change pas : je prévois que les longueurs obtenues en multipliant par k diminuent, et que celles obtenues en divisant par k augmentent. Ici, $OD = k \times OB$ diminue et $AB = CD \div k$ augmente. Je vérifie : La démonstration de la question a) n'utilise aucune longueur : avec $OC = 3$, les triangles OAB et OCD restent semblables, avec les mêmes côtés homologues.

Je range les côtés homologues dans un tableau, avec $OC = 3$:

côtés de OAB	$OA = 6$	$OB = 5,4$	$AB = ?$
côtés de OCD	$OC = 3$	$OD = ?$	$CD = 5$

Le rapport de similitude de OAB vers OCD est $k = \frac{OC}{OA} = \frac{3}{6} = 0,5$ (réduction).

Pour aller vers le triangle OCD , je multiplie par k : $OD = 0,5 \times OB = 0,5 \times 5,4 = \boxed{2,7}$.

Pour revenir vers le triangle OAB , je divise par k : $AB = CD \div 0,5 = 5 \div 0,5 = \boxed{10}$.

Vérification : $\frac{3}{6} = \frac{2,7}{5,4} = \frac{5}{10} = 0,5$: les rapports sont égaux. Le rapport est strictement inférieur à 1, donc chaque côté de OCD doit être strictement plus court que son homologue dans OAB : c'est le cas, $3 < 6$, $2,7 < 5,4$ et $5 < 10$. ✓

La prévision est juste : k passe de $\frac{2}{3}$ à 0,5, OD diminue de 3,6 à 2,7 et AB augmente de 7,5 à 10.

2. Énoncé : « Les triangles ABC et DEF sont semblables, avec $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ et $C \leftrightarrow F$. On donne $AB = 8$ cm, $BC = 6$ cm, $DE = 6$ cm et $DF = 7,5$ cm. Calculer EF et AC . »

Les contraintes sont respectées : $\frac{DE}{AB} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$, donc DEF est une réduction de ABC dans le rapport $\frac{3}{4}$; la longueur inconnue AC est dans le triangle ABC , et EF dans le triangle DEF ; la correspondance des sommets est écrite.

3. D'après l'énoncé, $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow E$ et $C \leftrightarrow F$: les côtés homologues sont $[AB] \leftrightarrow [DE]$, $[AC] \leftrightarrow [DF]$ et $[BC] \leftrightarrow [EF]$.

Je range les côtés homologues dans un tableau :

côtés de ABC	$AB = 8$	$AC = ?$	$BC = 6$
côtés de DEF	$DE = 6$	$DF = 7,5$	$EF = ?$

Le rapport de similitude de ABC vers DEF est $k = \frac{DE}{AB} = \frac{6}{8} = 0,75$ (réduction).

Pour aller vers le triangle DEF , je multiplie par k : $EF = 0,75 \times BC = 0,75 \times 6 = \boxed{4,5 \text{ cm}}$.

Pour revenir vers le triangle ABC , je divise par k : $AC = DF \div 0,75 = 7,5 \div 0,75 = \boxed{10 \text{ cm}}$.

Vérification : $\frac{6}{8} = \frac{7,5}{10} = \frac{4,5}{6} = 0,75$: les rapports sont égaux. Le rapport est strictement inférieur à 1, donc chaque côté de DEF doit être strictement plus court que son homologue dans ABC : c'est le cas, $6 < 8$, $7,5 < 10$ et $4,5 < 6$. ✓

Avant de donner l'énoncé à un camarade, je vérifie qu'il donne la correspondance des sommets et toutes les longueurs utiles : c'est le cas, et chacune des quatre longueurs a servi.

5.4. Démontrer une perpendicularité : les deux milieux du carré

★★★☆

Méthode. Modèle associé : **J1**. Un plan de bataille en cascade : triangles égaux (les données du carré) $\rightarrow$ angles de même mesure $\rightarrow$ triangles semblables $\rightarrow$ l'angle en H vaut 90° . Comme dans la démonstration du cours et en 7.5, égalité et similitude servent dans la même preuve.



- a) Dans les triangles ABI et DAJ , on a : $AB = DA$ (côtés du carré) ; $\widehat{BAI} = \widehat{ADJ} = 90^\circ$ (angles du carré) ; $AI = DJ$ (moitiés des côtés $[AD]$ et $[DC]$, qui ont la même longueur). L'angle droit est compris entre les deux côtés cités : d'après le cas d'égalité « côté-angle-côté », les triangles ABI et DAJ sont égaux, avec $A \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow A$ et $I \leftrightarrow J$. ■
- b) Or, si deux triangles sont égaux, alors leurs angles homologues ont la même mesure : donc $\widehat{ABI} = \widehat{DAJ}$ et $\widehat{AIB} = \widehat{DJA}$. ■
- c) D'une part, $\widehat{ABH} = \widehat{ABI} = \widehat{DAJ}$ (question b, et $H \in [BI]$). D'autre part, $\widehat{HAB} = \widehat{JAB} = \widehat{DAB} - \widehat{DAJ} = 90^\circ - \widehat{DAJ}$; or, dans le triangle DAJ rectangle en D , on a aussi $\widehat{DJA} = 90^\circ - \widehat{DAJ}$; donc $\widehat{HAB} = \widehat{DJA}$. Les triangles AHB et JDA ont deux angles deux à deux de même mesure : ils sont semblables, avec $A \leftrightarrow J$, $H \leftrightarrow D$, $B \leftrightarrow A$. ■
- d) Or, si deux triangles sont semblables, alors leurs angles homologues ont la même mesure : donc $\widehat{AHB} = \widehat{JDA} = 90^\circ$. Ainsi $(AJ) \perp (BI)$. ■
- e) Autre méthode. Dans le triangle ABH : $\widehat{HAB} + \widehat{ABH} = (90^\circ - \widehat{DAJ}) + \widehat{DAJ} = 90^\circ$, donc $\widehat{AHB} = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Comparaison. La méthode e) est plus courte ; mais la méthode c)-d) démontre en plus que AHB et JDA sont semblables, elle offre gratuitement tous les rapports de longueurs ($\frac{AH}{JD} = \frac{HB}{DA} = \frac{AB}{JA}$) : c'est elle qui se généralise dès qu'on veut calculer dans la figure.

À retenir. Pour démontrer une perpendicularité sans mesure : viser un angle de 90° transporté par des triangles égaux ou semblables. Et retenir le duo du carré : les segments « sommet $\rightarrow$ milieu » $[AJ]$ et $[BI]$ sont toujours perpendiculaires (et de même longueur !) : vrai dans tout carré, quelle que soit sa taille.

6. Sujets type Brevet

6.1. Brevet 1 : Triangles semblables sur une droite

★★★☆

Méthode. Modèles associés : **D1** (question a)) ; **D2** (question b)) ; **L1** (question c)).

a) On sait que les droites (SU) et (RV) sont parallèles, et que la droite (ST) les coupe en S et en R ; les angles $\widehat{USR}$ et $\widehat{VRT}$ sont correspondants. Or, si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles correspondants qu'elles forment ont la même mesure. Donc $\widehat{USR} = \widehat{VRT}$. ■

b) On sait que $\widehat{USR} = \widehat{VRT}$, d'après la question a).

De même, les droites parallèles (RU) et (TV) sont coupées par la sécante (ST) en R et T respectivement. Les angles correspondants $\widehat{URS}$ et $\widehat{VTR}$ ont donc la même mesure : $\widehat{URS} = \widehat{VTR}$.

Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

Donc les triangles SRU et RTV sont semblables, les sommets homologues étant $S \leftrightarrow R$, $R \leftrightarrow T$ et $U \leftrightarrow V$. ■

c) D'après la question b), $S \leftrightarrow R$, $R \leftrightarrow T$ et $U \leftrightarrow V$: les côtés homologues sont $[SR] \leftrightarrow [RT]$, $[SU] \leftrightarrow [RV]$ et $[RU] \leftrightarrow [TV]$. Le point R appartient au segment $[ST]$, donc $RT = ST - SR = 10 - 4 = 6$. Je range les côtés homologues dans un tableau :

côtés de RTV	$RT = 6$	$RV = 5,4$	$TV = 7,2$
côtés de SRU	$SR = 4$	$SU = ?$	$RU = ?$

Le rapport de similitude de RTV vers SRU est $k = \frac{SR}{RT} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ (réduction).

Pour aller vers le triangle SRU , je multiplie par k :

$$SU = \frac{2}{3} \times RV = \frac{2}{3} \times 5,4 = \frac{2 \times 5,4}{3} = \frac{10,8}{3} = 3,6$$

$$RU = \frac{2}{3} \times TV = \frac{2}{3} \times 7,2 = \frac{2 \times 7,2}{3} = \frac{14,4}{3} = 4,8$$

Vérification : $\frac{4}{6} = \frac{3,6}{5,4} = \frac{4,8}{7,2} = \frac{2}{3}$: les rapports sont égaux. Le rapport est strictement inférieur à 1, donc chaque côté de SRU doit être strictement plus court que son homologue dans RTV : c'est le cas, $4 < 6$, $3,6 < 5,4$ et $4,8 < 7,2$. ✓

6.2. Brevet 2 : Le papillon

★★★☆

Méthode. Modèles associés : **D2** (question a)) ; **L1** (question b)).

a) Les angles $\widehat{AOB}$ et $\widehat{COD}$ sont opposés par le sommet (avec les droites (AC) et (BD) sécantes en O), donc $\widehat{AOB} = \widehat{COD}$.

Les droites parallèles (AB) et (CD) sont coupées par la sécante (AC) en A et C respectivement. Les angles alternes-internes $\widehat{OAB}$ et $\widehat{OCD}$ ont donc la même mesure : $\widehat{OAB} = \widehat{OCD}$.

Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables.

Donc les triangles OAB et OCD sont semblables, les sommets homologues étant $O \leftrightarrow O$, $A \leftrightarrow C$ et $B \leftrightarrow D$. ■

🔗 b) D'après la question a), $O \leftrightarrow O$, $A \leftrightarrow C$ et $B \leftrightarrow D$: les côtés homologues sont $[OA] \leftrightarrow [OC]$, $[OB] \leftrightarrow [OD]$ et $[AB] \leftrightarrow [CD]$.
Je range les côtés homologues dans un tableau :

côtés de OAB	$OA = 3$	$OB = 2,4$	$AB = 4,2$
côtés de $ OCD$	$OC = 5$	$OD = ?$	$CD = ?$

Le rapport de similitude de OAB vers OCD est $k = \frac{OC}{OA} = \frac{5}{3}$ (agrandissement).

Pour aller vers le triangle OCD , je multiplie par k :

$$CD = \frac{5}{3} \times AB = \frac{5}{3} \times 4,2 = \frac{5 \times 4,2}{3} = \frac{21}{3} = \boxed{7}$$

$$OD = \frac{5}{3} \times OB = \frac{5}{3} \times 2,4 = \frac{5 \times 2,4}{3} = \frac{12}{3} = \boxed{4}$$

Vérification : $\frac{5}{3} = \frac{4}{2,4} = \frac{7}{4,2}$: les rapports sont égaux. Le rapport est strictement supérieur à 1, donc chaque côté de OCD doit être strictement plus long que son homologue dans OAB : c'est le cas, $5 > 3$, $4 > 2,4$ et $7 > 4,2$. ✓

6.3. Brevet 3 : Semblables et aires

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **A1** (question a)) ; **A2** (questions b) et c)).

🔗 a) Les côtés homologues $[AB]$ et $[DE]$ joignent les sommets homologues $A \leftrightarrow D$ et $B \leftrightarrow E$.

Le rapport de similitude de ABC vers DEF est $k = \frac{DE}{AB} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.

On a $0 < k < 1$, donc le triangle DEF est une réduction du triangle ABC , de rapport $k = \frac{2}{3}$.

🔗 b) D'après la question a), de ABC vers DEF , les longueurs sont multipliées par $\frac{2}{3}$.

Je cherche un périmètre, qui est une longueur : il est multiplié par $\frac{2}{3}$.

$$18 \times \frac{2}{3} = \frac{18 \times 2}{3} = \frac{36}{3} = 12.$$

Conclusion : le périmètre du triangle DEF est $\boxed{12 \text{ cm}}$.

$$\text{Vérification : } 12 \div \frac{2}{3} = 12 \times \frac{3}{2} = \frac{12 \times 3}{2} = \frac{36}{2} = 18. \checkmark$$

🔗 c) D'après la question a), de ABC vers DEF , les longueurs sont multipliées par $\frac{2}{3}$.

Je cherche une aire : elle est multipliée par $\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}$.

$$13,5 \times \frac{4}{9} = \frac{13,5 \times 4}{9} = \frac{54}{9} = 6.$$

Conclusion : l'aire du triangle DEF est $\boxed{6 \text{ cm}^2}$.

$$\text{Vérification : } 6 \div \frac{4}{9} = 6 \times \frac{9}{4} = \frac{6 \times 9}{4} = \frac{54}{4} = 13,5. \checkmark$$

6.4. Brevet 4 : Reconnaître, puis calculer

★★★☆☆

Méthode. Modèles associés : **R1** (question a)) ; **L1** (questions b) et c)).

🔗 a) Triangle JKL : $\widehat{L} = 180^\circ - 35^\circ - 60^\circ = 85^\circ$. Triangle MNP : $\widehat{P} = 180^\circ - 85^\circ - 60^\circ = 35^\circ$.

Les angles du triangle JKL sont 35° , 60° et 85° ; ceux du triangle MNP sont 35° , 60° et 85° .

Les deux triangles ont des angles deux à deux de même mesure : d'après la caractérisation angulaire, ils sont $\boxed{\text{semblables}}$.

🔗 b) Les sommets homologues sont ceux des angles de même mesure : $J \leftrightarrow P$ (35°), $K \leftrightarrow N$ (60°) et $L \leftrightarrow M$ (85°).

🔗 c) D'après la question b), $J \leftrightarrow P$, $K \leftrightarrow N$ et $L \leftrightarrow M$: les côtés homologues sont $[JK] \leftrightarrow [PN]$, $[JL] \leftrightarrow [PM]$ et $[KL] \leftrightarrow [NM]$.

Je range les côtés homologues dans un tableau :

côtés de $ JKL$	$JK = 8$	JL	$KL \approx 4,6$
côtés de $ PNM$	$PN = 6$	PM	$NM = ?$

Le rapport de similitude de JKL vers PNM est $k = \frac{PN}{JK} = \frac{6}{8} = 0,75$ (réduction).

Pour aller vers le triangle PNM , je multiplie par k : $NM = 0,75 \times KL \approx 0,75 \times 4,6 = 3,45$, donc $\boxed{NM \approx 3,45 \text{ cm}}$. Ce résultat est une estimation : il est calculé avec une longueur arrondie.

Vérification : $\frac{6}{8} = \frac{3,45}{4,6} = 0,75$: les rapports sont égaux. Le rapport est strictement inférieur à 1, donc chaque côté de PNM doit être strictement plus court que son homologue dans JKL : c'est le cas, $6 < 8$ et $3,45 < 4,6$. ✓

6.5. Brevet 5 : Le plan de l'appartement

★★★☆☆

Méthode. Modèle associé : **A2** (questions a) et b)).

 a) Du plan vers l'appartement réel, les longueurs sont multipliées par 50.

Je cherche une longueur : elle est multipliée par 50.

$12 \times 50 = 600$ cm, et 600 cm = 6 m.

Conclusion : le séjour mesure 6 m de long.

Vérification : $600 \div 50 = 12$. ✓

 b) Du plan vers l'appartement réel, les longueurs sont multipliées par 50.

Je cherche une aire : elle est multipliée par $50^2 = 2500$.

$48 \times 2500 = 120\,000$ cm², et $120\,000$ cm² = 12 m², car 1 m² = $10\,000$ cm².

Conclusion : la chambre a une aire réelle de 12 m².

Vérification : $120\,000 \div 2\,500 = 48$. ✓

 c) La donnée « la hauteur sous plafond est de 2,50 m » n'a pas servi : un plan est une figure plane qui représente le sol, les hauteurs n'y apparaissent pas. Un énoncé peut contenir une donnée inutile : il faut choisir celles qui servent.

6.6. Brevet 6 : La maquette de voiture au 1/18

★★★☆☆

Méthode. Modèle associé : **A2**.

 a) De la voiture vers la maquette, les longueurs sont multipliées par $\frac{1}{18}$, c'est-à-dire divisées par 18.

Je cherche une longueur : elle est divisée par 18.

$4,32 \div 18 = 0,24$ m, et $0,24$ m = 24 cm.

Conclusion : la maquette mesure 24 cm de long.

Vérification : $0,24 \times 18 = 4,32$. ✓

 b) De la voiture vers la maquette, les longueurs sont divisées par 18.

Je cherche une aire : elle est divisée par $18^2 = 324$.

$1,296 \div 324 = 0,004$ m², et $0,004$ m² = 40 cm², car 1 m² = $10\,000$ cm².

Conclusion : le pare-brise de la maquette a une aire de 40 cm².

Vérification : $0,004 \times 324 = 1,296$. ✓

 c) De la voiture vers la maquette, les longueurs sont divisées par 18.

Je cherche un volume : il est divisé par $18^3 = 5\,832$.

$291,6 \div 5\,832 = 0,05$ L, et $0,05$ L = 50 mL, car 1 L = $1\,000$ mL.

Conclusion : le coffre de la maquette a un volume de 50 mL.

Vérification : $0,05 \times 5\,832 = 291,6$. ✓

Attention ! En b), diviser par 18 au lieu de 18^2 donnerait $1,296 \div 18 = 0,072$ m², soit 720 cm² : un pare-brise plus grand qu'une feuille A4 pour une maquette de 24 cm de long est invraisemblable.

6.7. Brevet 7 : Les deux plateaux

★★★★



a) Le périmètre est une somme de longueurs : si chaque côté est multiplié par k , la somme aussi. Donc $k = \frac{P_{\text{grand}}}{P_{\text{petit}}} = \frac{90}{60} = \boxed{1,5}$ (agrandissement).

b) Dans un agrandissement de rapport $k = 1,5$, les aires sont multipliées par $k^2 = 1,5^2 = 2,25$: l'aire du grand plateau vaut $150 \times 2,25 = \boxed{337,5 \text{ cm}^2}$.

c) Si le prix suit l'aire (la quantité de bois), le grand devrait coûter $24 \times 2,25 = \boxed{54 \text{ €}}$, et non $24 \times 1,5 = 36 \text{ €}$. L'artisan qui vend « $\times 1,5$ » se pénalise lui-même : il donne 2,25 fois plus de bois pour 1,5 fois plus d'argent.

- a) $\frac{40}{10} = 4$ et $\frac{60}{15} = 4$: les deux dimensions sont multipliées par le même nombre, donc oui, c'est un agrandissement de rapport $\boxed{4}$.
- b) Dans un agrandissement de rapport 4, les aires sont multipliées par $4^2 = \boxed{16}$ (le tirage passe de 150 cm^2 à 2400 cm^2).
- c) $\frac{13}{10} = 1,3$ mais $\frac{18}{15} = 1,2$: les rapports diffèrent, le 13×18 n'est pas un agrandissement du 10×15 (les proportions changent). Pour remplir le papier 13×18 sans déformer, le laboratoire agrandit d'abord de 1,3 (obtenant $13 \times 19,5$), puis rogne 1,5 cm sur la longueur : c'est pour cela que des bords de l'image disparaissent.

6.8. Enrichissement facultatif

Correction détaillée : retrouver le même format après découpe

A1. La moitié de l'aire n'impose pas la même forme

La feuille 10×15 a pour rapport de format $15/10 = 3/2$. Une moitié mesure $10 \times 7,5$: son grand côté est 10 et son petit côté 7,5. Son rapport est donc $10/7,5 = 4/3$.

Les nombres $3/2$ et $4/3$ diffèrent : $3 \times 3 = 9 \neq 8 = 2 \times 4$. Les rectangles ne sont pas de même forme, même en tournant la moitié. Son aire vaut pourtant $10 \times 7,5 = 75 \text{ cm}^2$, moitié des 150 cm^2 initiaux. La règle « aire multipliée par k^2 » suppose déjà une réduction ; on ne peut pas reconnaître une réduction avec la seule aire.

A2. Écarter tout un cas

Si $L \geq 2\ell$, alors $L/2 \geq \ell$. En appariant les longueurs par ordre, les deux coefficients « moitié / feuille entière » sont

$$\frac{L/2}{L} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \frac{\ell}{\ell} = 1.$$

Ils diffèrent, donc la forme change. Au cas limite $L = 2\ell$, la moitié est même un carré, alors que la feuille initiale a un côté double de l'autre. Aucune feuille de ce cas ne convient.

B1. Traduire le nouvel appariement

Pour $\ell < L < 2\ell$, on a $L/2 < \ell$. Le grand côté initial L correspond au grand côté de la moitié ℓ ; le petit côté initial ℓ correspond à $L/2$. La conservation de la forme impose donc

$$\frac{\ell}{L} = \frac{L/2}{\ell} \implies \ell^2 = \frac{L^2}{2} \implies L^2 = 2\ell^2.$$

On multiplie par 2, puis on divise par $\ell^2 > 0$. Avec $r = L/\ell$, cela donne $r^2 = 2$. Comme $r > 0$, le seul candidat est $r = \sqrt{2}$. Il est bien entre 1 et 2, puisque $1^2 < 2 < 2^2$. Le changement d'ordre des côtés est compatible avec la solution.

B2. Vérifier le candidat, puis calculer une feuille

Réciproquement, si $L^2 = 2\ell^2$ avec des longueurs positives, on divise par $2L\ell$:

$$\frac{L}{2\ell} = \frac{\ell}{L}.$$

Ce sont les deux coefficients de longueurs homologues : ils sont égaux, donc la moitié a bien la même forme. La condition est nécessaire et suffisante dans le domaine recherché.

Pour $\ell = 10 \text{ cm}$, on obtient

$$L = 10\sqrt{2} \text{ cm} \approx 14,14 \text{ cm}.$$

Le coefficient vers une moitié est $k = \ell/L = 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}/2$. La dernière égalité se vérifie en multipliant $\sqrt{2}/2$ par $\sqrt{2}$: on trouve $2/2 = 1$. Pour l'aire,

$$k^2 = \frac{1}{(\sqrt{2})^2} = \frac{1}{2}.$$

C'est cohérent avec le partage en deux moitiés égales. Une longueur arrondie à 14,14 cm donne seulement une réalisation approchée du format exact $10\sqrt{2} \text{ cm}$.

B3. Répéter la découpe

La première moitié a le même rapport de format $\sqrt{2}$. Elle satisfait donc à son tour la condition démontrée : on peut recommencer. Après deux coupures successives, un morceau représente $(1/2) \times (1/2) = 1/4$ de l'aire initiale.

Les coefficients de longueurs se multiplient : $k \times k = k^2 = 1/2$. On peut aussi suivre les dimensions : après la deuxième coupure, un morceau mesure $L/2$ et $\ell/2$. Chaque côté a été divisé par 2, et l'aire par 4.

C1. Retrouver la démarche avec trois morceaux

Dans le domaine $\ell < L < 3\ell$, le petit côté du morceau est $L/3$ et son grand côté est ℓ . Il faut donc

$$\frac{\ell}{L} = \frac{L/3}{\ell} \implies L^2 = 3\ell^2 \implies r^2 = 3.$$

Le seul candidat positif est $r = \sqrt{3}$. Il appartient au domaine : $1 < \sqrt{3} < 3$. Réciproquement, $L^2 = 3\ell^2$ donne bien l'égalité des rapports en divisant par $3L\ell > 0$. Ce format convient :

$$r = \sqrt{3}, \quad k = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \frac{\text{aire d'un morceau}}{\text{aire initiale}} = \frac{1}{3}.$$

La méthode se transfère parce qu'on refait l'appariement et la preuve ; on ne conserve pas le format $\sqrt{2}$ de la première découpe.

C2. L'arrondi peut masquer un défaut exact

Avec les mesures exactes proposées,

$29,7^2 = 882,09$ et $2 \times 21^2 = 2 \times 441 = 882$.

Ces nombres ne sont pas égaux. La condition $L^2 = 2\ell^2$ n'est donc pas satisfaite : la feuille ne conserve pas exactement son format. Les deux formats sont très proches, ce qui explique qu'une mesure ou un dessin puisse ne pas montrer l'écart. « Presque égal » et « égal » restent deux conclusions différentes.

6.9. Brevet 9 : L'angle commun caché

★★★★



a) On sait que $\widehat{EAD} = \widehat{CAB}$ (angle commun en A , avec $E \in [AB]$ et $D \in [AC]$) et que $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$ (donnée de l'énoncé). Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables : les triangles AED et ACB sont semblables, avec $A \leftrightarrow A$, $E \leftrightarrow C$, $D \leftrightarrow B$. ■

b) Côtés homologues : $[AE] \leftrightarrow [AC]$, $[ED] \leftrightarrow [CB]$, $[AD] \leftrightarrow [AB]$. Le rapport de réduction de ACB vers AED est $k = \frac{AE}{AC} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$. Donc :

$$ED = \frac{1}{3} \times CB = \frac{1}{3} \times 7,5 = \boxed{2,5} \qquad AB = AD \div \frac{1}{3} = 4 \times 3 = \boxed{12}$$

(pour AB , on remonte du triangle réduit vers le triangle initial : on divise par $\frac{1}{3}$, soit on multiplie par 3).

c) $AE = 3$ et $AB = 12$: on a bien $3 < 12$, donc E est à l'intérieur de $[AB]$ ✓. Ce contrôle est utile car une inversion du sens de calcul (multiplier AD par $\frac{1}{3}$ au lieu de diviser, ce qui donnerait $AB = \frac{4}{3} < 3 = AE$) donnerait une longueur incompatible avec $E \in [AB]$.

7. Pour aller plus loin (banque triée)

7.1. Géographie : lire une carte

★★★☆

Méthode. Modèle associé : **A2** (questions a) et c)).



a) De la carte vers la réalité, les longueurs sont multipliées par 2 000 000.

Je cherche une longueur : elle est multipliée par 2 000 000.

$19,6 \times 2\,000\,000 = 39\,200\,000$ cm, et $39\,200\,000$ cm = 392 km, car 1 km = 100 000 cm.

Conclusion : à vol d'oiseau, Paris et Lyon sont distantes de $\boxed{392 \text{ km}}$.

Vérification : $39\,200\,000 \div 2\,000\,000 = 19,6$. ✓



b) La carte donne la distance à vol d'oiseau, en ligne droite. La route contourne les reliefs et les villes : elle est plus longue, 465 km > 392 km. Les deux réponses ne mesurent pas la même chose.



c) De la carte vers la réalité, les longueurs sont multipliées par 200 000.

Je cherche une aire : elle est multipliée par $200\,000^2 = (2 \times 10^5)^2 = 4 \times 10^{10}$.

$4,5 \times 4 \times 10^{10} = 18 \times 10^{10} = 1,8 \times 10^{11}$ cm², et $1,8 \times 10^{11}$ cm² = 18 km², car 1 km² = 10¹⁰ cm² et $1,8 \times 10^{11} \div 10^{10} = 1,8 \times 10 = 18$.

Conclusion : le lac a une aire réelle de $\boxed{18 \text{ km}^2}$.

Vérification : $1,8 \times 10^{11} \div (4 \times 10^{10}) = 4,5$. ✓

7.2. SVT : au microscope

★★★☆

Méthode. Modèle associé : **A2** (questions a) et b)).



a) De la cellule vers son image, les longueurs sont multipliées par 400.

Je cherche une longueur : elle est multipliée par 400.

$50 \times 400 = 20\,000$ µm, et $20\,000$ µm = 20 mm = 2 cm, car 1 µm = 0,001 mm et 1 cm = 10 mm.

Conclusion : sur la photographie imprimée, la cellule mesure $\boxed{2 \text{ cm}}$.

Vérification : $20\,000 \div 400 = 50$. ✓

b) Les longueurs sont multipliées par 400.

Je cherche une aire : elle est multipliée par $400^2 = 160\,000$.

Conclusion : l'aire de l'image de la cellule est multipliée par $\boxed{160\,000}$.



c) 1 µm = 0,001 mm = 10⁻³ mm et 1 mm = 10⁻³ m, donc 1 µm = 10⁻³ × 10⁻³ m = 10⁻⁶ m.

$50 \text{ µm} = 50 \times 10^{-6} \text{ m} = 5 \times 10^1 \times 10^{-6} \text{ m} = \boxed{5 \times 10^{-5} \text{ m}}$, car $10^1 \times 10^{-6} = 10^{1+(-6)} = 10^{-5}$.

25

7.3. Le géant impossible 🏰

★★★★

- a) La taille est une longueur, multipliée par 10 : $1,80 \times 10 = \boxed{18 \text{ m}}$.
- b) La masse suit le volume, multiplié par $10^3 = 1\,000$: $80 \times 1\,000 = 80\,000 \text{ kg} = \boxed{80 \text{ tonnes}}$.
- c) L'aire d'une section est multipliée par $10^2 = \boxed{100}$.
- d) La masse est 1 000 fois plus grande, la solidité seulement 100 fois : chaque cm^2 d'os porte $\frac{1\,000}{100} = \boxed{10}$ fois plus de masse. La charge par unité de section serait donc dix fois plus grande : le géant serait plus fragile. On ne peut toutefois pas affirmer que les os casseraient sans connaître la charge maximale qu'ils supportaient initialement. C'est la « loi carré-cube » : elle explique aussi pourquoi l'éléphant a des pattes en colonnes et la gazelle des pattes fines (plus un animal est grand, plus ses os doivent être proportionnellement épais).

7.4. Des transformations pour passer de l'un à l'autre 🏰

★★★☆☆

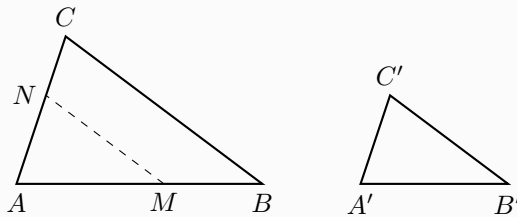
- a) Sur le quadrillage, les côtés de l'angle droit mesurent 2 et 1 pour T_1 , 4 et 2 pour T_2 : ils sont doublés. Pour les hypoténuses, le théorème de Pythagore donne $BC^2 = 2^2 + 1^2 = 5$ et $B'C'^2 = 4^2 + 2^2 = 20 = 4 \times 5$: le carré est multiplié par 4, donc l'hypoténuse est multipliée par 2 (car $(2\ell)^2 = 4\ell^2$). Les trois côtés sont doublés : T_2 est semblable à T_1 , de rapport $\boxed{k = 2}$ (agrandissement).
- b) Faire tourner T_1 d'un quart de tour dans le sens inverse des aiguilles d'une montre autour de A (les côtés de longueurs 2 et 1 deviennent vertical et horizontal, comme dans T_2), puis le glisser pour amener A sur A' , puis l'agrandir au double de centre A' .

À retenir. L'« agrandissement de centre fixé » nommé dans l'énoncé est une homothétie : dans cet exemple, une rotation, une translation et un agrandissement suffisent (pour deux triangles en miroir, une symétrie axiale peut aussi être nécessaire).

7.5. La réciproque de la caractérisation 🏰

★★★★

- a) On place M sur $[AB]$ avec $AM = A'B'$; ce point existe puisque $0 < A'B' < AB$. Puis on trace la parallèle à (BC) passant par M , qui coupe $[AC]$ en N .



- b) $M \in [AB]$, $N \in [AC]$ et $(MN) \parallel (BC)$: d'après la proportionnalité dans les triangles emboîtés (théorème de Thalès, vu en 4^e), $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC} = \frac{MN}{BC}$.
- c) Par construction $AM = A'B'$, donc $\frac{AM}{AB} = \frac{A'B'}{AB} = k$. Les trois rapports de la question b) valent donc k . Ainsi $AN = k \times AC$; or l'hypothèse donne aussi $A'C' = k \times AC$; donc $AN = A'C'$. De même $MN = k \times BC = B'C'$.
- d) Les triangles AMN et $A'B'C'$ ont leurs trois côtés deux à deux de même longueur ($AM = A'B'$, $AN = A'C'$, $MN = B'C'$) : ils sont égaux (cas « côté-côté-côté »), donc leurs angles sont deux à deux de même mesure. Reste à passer de AMN à ABC : l'angle en A est commun aux deux triangles ($\widehat{MAN} = \widehat{BAC}$), et $(MN) \parallel (BC)$ donne $\widehat{AMN} = \widehat{ABC}$ et $\widehat{ANM} = \widehat{ACB}$ (angles correspondants). Donc les angles de $A'B'C'$ ont les mêmes mesures que ceux de AMN , qui ont les mêmes mesures que ceux de ABC : les angles des deux triangles de départ sont deux à deux de même mesure. ■

7.6. Le triangle de Sierpiński 🏰

★★★★

- a) Chaque triangle conservé a un sommet du triangle initial et les milieux des deux côtés issus de ce sommet : chacun de ses côtés mesure la moitié du côté correspondant (par définition du milieu et théorème de la droite des milieux, 4^e). C'est donc une réduction de rapport $\frac{1}{2}$, et son aire vaut $\mathcal{A} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \boxed{\frac{\mathcal{A}}{4}}$.
- b) Étape 1 : $3 \times \frac{\mathcal{A}}{4} = \boxed{\frac{3}{4}\mathcal{A}}$. Étape 2 : chaque triangle subit le même traitement, donc l'aire est multipliée par $\frac{3}{4}$: $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \mathcal{A} = \boxed{\frac{9}{16}\mathcal{A}}$. À l'étape n : $\boxed{\left(\frac{3}{4}\right)^n \mathcal{A}}$.
- c) Étape 0 : $3 \times 8 = 24 \text{ cm}$. Étape 1 : 3 triangles de côté 4 cm, soit $3 \times 12 = \boxed{36 \text{ cm}}$. Étape 2 : 9 triangles de côté 2 cm, soit $9 \times 6 = \boxed{54 \text{ cm}}$. Le périmètre total est multiplié par $\boxed{\frac{3}{2}}$ à chaque étape.
- d) Quand on répète l'opération un très grand nombre de fois, l'aire grisée s'approche de 0 (multipliée par $\frac{3}{4} < 1$ à chaque étape), tandis que le périmètre total dépasse toute valeur (multiplié par $\frac{3}{2} > 1$ à chaque étape) : on obtient une figure « sans aire » mais au bord de longueur infinie (fractale).

7.7. Défi : presque jumeaux

★★★☆☆

 **Analyse.** Oui, c'est possible : l'idée est de prendre un triangle dont les côtés sont déjà en progression $\times k$, puis de le multiplier par k ; les deux longueurs du milieu se recouvrent alors.

Exemple avec $k = 1,5$: le triangle T_1 de côtés 4 ; 6 ; 9 et le triangle T_2 de côtés 6 ; 9 ; 13,5.

- Ce sont bien des triangles : $4 + 6 = 10 > 9$ ✓ et $6 + 9 = 15 > 13,5$ ✓ (inégalité triangulaire, vérification indispensable !).
- Ils sont semblables : $\frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{13,5}{9} = 1,5$ (agrandissement).
- Ils ne sont pas égaux ($k = 1,5 \neq 1$), et ils partagent deux longueurs de côtés : 6 et 9. ■

Remarque : il est indispensable de vérifier l'inégalité triangulaire, car trois nombres en progression géométrique ne forment pas toujours un triangle (1 ; 2 ; 4 par exemple, puisque $1 + 2 < 4$).

7.7. Enrichissement facultatif

Correction détaillée : de l'exemple à toute une famille

A1. Distinguer longueur commune et côté homologue

En rangeant les côtés dans le même ordre, on obtient

$$\frac{6}{4} = \frac{9}{6} = \frac{13,5}{9} = \frac{3}{2}.$$

Les côtés de longueur 4, 6, 9 du premier correspondent respectivement à ceux de longueur 6, 9, 13,5 du second.

Longueur commune	Rang dans le premier	Rang dans le second
6	intermédiaire	plus petit
9	plus grand	intermédiaire

Une même valeur passe d'un rang à l'autre. C'est pourquoi deux longueurs communes n'imposent pas un rapport de similitude égal à 1. L'exemple ne convient toutefois pas à la nouvelle demande : 13,5 cm n'est pas un nombre entier de centimètres.

A2. Écarter les triangles isocèles

Notons a la plus petite longueur du premier triangle. Dans l'agrandissement, la plus petite vaut ka . Comme $a > 0$ et $k > 1$, on a $ka > a$: toutes les longueurs du second sont strictement plus grandes que a . La valeur a ne peut donc pas être commune.

Un triangle isocèle non équilatéral n'a que deux valeurs distinctes de longueurs : si la plus petite est exclue, il ne reste au plus qu'une valeur commune. Un triangle équilatéral n'en a qu'une et ne peut pas davantage en partager deux distinctes. Toute solution recherchée a donc trois côtés de longueurs distinctes : on peut les noter $a < b < c$.

A3. Montrer pourquoi les côtés se suivent par multiplication

Les deux listes ordonnées sont

premier triangle
agrandissement

a
 ka

b
 kb

c
 kc

$(k > 1).$

On vient de prouver que a n'apparaît pas dans la seconde liste. De plus, $kc > c$, donc kc est plus grand que tous les côtés du premier : il ne peut pas être commun non plus.

Il ne reste que b, c dans la première liste, et ka, kb dans la seconde. Comme on exige deux valeurs communes distinctes, les deux ensembles de valeurs sont égaux : $\{b; c\} = \{ka; kb\}$. Or $b < c$ et $ka < kb$; les plus petites valeurs sont donc égales, puis les plus grandes :

$$b = ka, \quad c = kb = k^2a.$$

Ces égalités concernent les longueurs communes. Les côtés homologues restent appariés dans le même rang : a avec ka , b avec kb , c avec kc . On ne confond pas les deux appariements.

B1. Écrire les six longueurs et vérifier la géométrie

Pour $k = 3/2$, les relations de A3 donnent :

	petit côté	côté intermédiaire	grand côté
premier triangle	a	$\frac{3a}{2}$	$\frac{9a}{4}$
second triangle	$\frac{3a}{2}$	$\frac{9a}{4}$	$\frac{27a}{8}$

Pour tout $a > 0$, la somme des deux plus petits côtés du premier vaut

$$a + \frac{3a}{2} = \frac{5a}{2} = \frac{10a}{4} > \frac{9a}{4}.$$

L'inégalité triangulaire est stricte : les trois longueurs forment un triangle non aplati. Multiplier ses trois côtés par $3/2 > 0$ conserve cette inégalité : le second est aussi un triangle. Cette vérification est indispensable avant d'interpréter les listes de nombres comme des figures.

B2. Faire apparaître trois facteurs 2 obligatoires

Le nombre a est un entier positif. Pour que $3a/2$ soit entier, il faut que $3a$ soit pair. Puisque 3 est impair, a doit être pair : on écrit $a = 2u$, avec u entier positif.

On examine ensuite le côté $9a/4$:

$$\frac{9a}{4} = \frac{9 \times 2u}{4} = \frac{9u}{2}.$$

Ce nombre ne peut être entier que si $9u$ est pair. Comme 9 est impair, u doit être pair : $u = 2v$. Ainsi $a = 4v$.

Enfin, le plus grand côté du second triangle vaut

$$\frac{27a}{8} = \frac{27 \times 4v}{8} = \frac{27v}{2}.$$

Pour qu'il soit entier, $27v$ doit être pair. Comme 27 est impair, $v = 2n$ avec n entier positif. On obtient donc $a = 8n$. Les trois divisions successives par 2 expliquent pourquoi être seulement pair, ou seulement multiple de 4, ne suffit pas.

B3. Décrire toutes les solutions et vérifier la réciproque

En remplaçant a par $8n$, toute solution doit avoir la forme

$$(8n; 12n; 18n) \quad \text{et} \quad (12n; 18n; 27n), \quad n \geq 1 \text{ entier.}$$

Cela établit une condition nécessaire. Vérifions maintenant qu'elle est suffisante pour chaque entier $n \geq 1$:

- Les six longueurs sont des entiers strictement positifs.
- Elles forment deux triangles : $8n + 12n = 20n > 18n$ et $12n + 18n = 30n > 27n$.
- Les rapports entre côtés de même rang sont $12n/(8n) = 18n/(12n) = 27n/(18n) = 3/2$. Les triangles sont donc semblables.
- Ils ne sont pas égaux : leurs plus petits côtés valent respectivement $8n$ et $12n$, deux valeurs différentes puisque $n > 0$.
- Ils partagent exactement les deux longueurs distinctes $12n$ et $18n$. La valeur $8n$ est trop petite pour appartenir au second, et $27n$ trop grande pour appartenir au premier.

Toute solution a cette forme, et toute paire de cette forme convient : on a bien obtenu toutes les solutions, et pas seulement une collection d'exemples.

B4. Justifier le plus petit choix

Le plus petit côté vaut $a = 8n$, avec n entier au moins égal à 1. Il est donc au moins égal à 8 cm. Pour $n = 1$, on obtient (8; 12; 18) et (12; 18; 27) ; B3 garantit que cette paire convient. Le minimum $a = 8$ cm est donc atteint, et aucune valeur plus petite n'est possible.

C1. Ajouter la borne de 100 cm

Le plus grand côté du second triangle vaut $27n$. On exige $27n \leq 100$. Or $27 \times 3 = 81 \leq 100$ et $27 \times 4 = 108 > 100$. Comme n est entier positif, les seules possibilités sont 1, 2 et 3 :

n	Premier triangle (cm)	Second triangle (cm)	Longueurs communes (cm)
1	(8; 12; 18)	(12; 18; 27)	12 et 18
2	(16; 24; 36)	(24; 36; 54)	24 et 36
3	(24; 36; 54)	(36; 54; 81)	36 et 54

Il y a exactement trois paires. Aucune ne manque, puisque B3 décrit toutes les solutions et que l'on a examiné tous les entiers autorisés par la borne. Elles sont différentes car leurs plus petits côtés $8n$ sont différents.

C2. Comprendre l'échec du rapport 2

La partie A s'appliquait à tout $k > 1$. Si deux triangles de rapport 2 partageaient deux longueurs distinctes, les côtés du premier seraient donc a , $2a$, $4a$, avec $a > 0$. Mais

$$a + 2a = 3a < 4a.$$

L'inégalité triangulaire n'est pas satisfaite : ces longueurs ne peuvent pas former un triangle. C'est impossible même si l'on autorise des longueurs non entières.

L'obstacle a changé : pour $3/2$, on avait de vrais triangles et il fallait sélectionner les longueurs entières ; pour 2, c'est la construction du triangle elle-même qui échoue. La proportionnalité de deux listes de nombres ne garantit pas que ces listes représentent des triangles.

7.8. Relations dans le triangle rectangle : Pythagore redémontré

★★★★

Méthode. Quatre relations, un seul moteur : « angle aigu commun + angle droit $\Rightarrow$ semblables », utilisé deux fois. Toute la difficulté est dans l'appariement : suivre les angles, écrire les trois rapports dans l'ordre, puis récolter les produits en croix.

- a) Dans les triangles ABC et HBA , on a $\widehat{ABC} = \widehat{HBA}$ (angle commun en B , car $H \in [BC]$) et $\widehat{BAC} = \widehat{BHA} = 90^\circ$. Or, si deux triangles ont deux angles deux à deux de même mesure, alors ils sont semblables. Donc les triangles ABC et HBA sont semblables. Appariement par les angles : les angles droits se correspondent ($A \leftrightarrow H$), l'angle commun aussi ($B \leftrightarrow B$), donc $C \leftrightarrow A$. Face à $\widehat{BAC} = 90^\circ$: $[BC]$; face à $\widehat{BHA} = 90^\circ$: $[BA]$. Face à $\widehat{ABC} = \widehat{HBA}$: $[CA]$ et $[AH]$. Face à $\widehat{ACB}$ et à son homologue $\widehat{BAH}$: $[AB]$ et $[HB]$. D'où

$$\frac{BC}{BA} = \frac{CA}{AH} = \frac{AB}{HB}.$$

- b) De $\frac{CA}{AH} = \frac{BC}{BA}$, l'égalité des produits en croix donne $AH \times BC = CA \times BA$, donc $AH = \frac{AB \times AC}{BC}$. De $\frac{BC}{BA} = \frac{AB}{HB}$, l'égalité des produits en croix donne $AB^2 = BH \times BC$ (théorème d'Euclide). ■

- c) De même, dans les triangles ABC et HAC , l'angle en C est commun ($\widehat{ACB} = \widehat{HCA}$, avec $H \in [BC]$) et $\widehat{BAC} = \widehat{CHA} = 90^\circ$: ils sont semblables, avec $A \leftrightarrow H$, $C \leftrightarrow C$, $B \leftrightarrow A$, d'où

$$\frac{BC}{AC} = \frac{CA}{CH} = \frac{AB}{HA}.$$

De $\frac{BC}{AC} = \frac{CA}{CH}$, l'égalité des produits en croix donne $AC^2 = CH \times CB$. ■

- d) De a) : $\frac{CA}{AH} = \frac{AB}{HB}$ donne $AH \times AB = CA \times HB$, soit $AH = HB \times \frac{CA}{AB}$. De c) : $\frac{CA}{CH} = \frac{AB}{HA}$ donne $AH \times CA = CH \times AB$, soit $AH = CH \times \frac{AB}{CA}$. En multipliant membre à membre :

$$AH^2 = HB \times CH \times \frac{CA}{AB} \times \frac{AB}{CA} = HB \times HC. \quad \boxed{AH^2 = HB \times HC}$$

(relation de la hauteur, dite « de Descartes »). ■

- e) En additionnant les deux égalités d'Euclide : $AB^2 + AC^2 = BH \times BC + CH \times CB = BC \times (BH + CH)$. Comme H appartient au segment $[BC]$, $BH + HC = BC$, donc $AB^2 + AC^2 = BC \times BC = BC^2$. $\boxed{BC^2 = AB^2 + AC^2}$: c'est le théorème de Pythagore, redémontré par les seuls triangles semblables. ■

- f) Contrôle numérique ($AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$) : $AH = \frac{3 \times 4}{5} = \frac{12}{5} = 2,4$; $BH = \frac{AB^2}{BC} = \frac{9}{5} = 1,8$; $CH = \frac{AC^2}{BC} = \frac{16}{5} = 3,2$. Vérifications : $1,8 + 3,2 = 5 = BC$ ✓ ; $AH^2 = 5,76 = 1,8 \times 3,2$ ✓ ; $3^2 = 9 = 1,8 \times 5$ ✓ ; $4^2 = 16 = 3,2 \times 5$ ✓

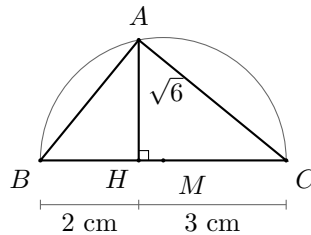
À retenir. Dans un triangle rectangle, la hauteur issue de l'angle droit fabrique trois triangles deux à deux semblables (ABC , HBA , HAC) : c'est une mine de relations, hauteur $AH = \frac{AB \times AC}{BC}$, Euclide $AB^2 = BH \times BC$, Descartes $AH^2 = HB \times HC$, et une porte d'entrée royale pour un exposé.

7.8. Enrichissement facultatif

Correction détaillée : construire et prouver une longueur exacte

A1. Choisir le cercle qui garantit l'angle droit

Le diamètre mesure $BC = 5$ cm, donc le rayon est $5/2 = 2,5$ cm. Comme H est entre B et C , on a $HC = BC - BH = 5 - 2 = 3$ cm. On place le centre M à 2,5 cm de B , puis on trace le demi-cercle de rayon 2,5 cm. La perpendiculaire en H coupe l'arc supérieur en A :



La longueur indiquée sur la figure est justifiée ci-dessous ; elle ne se déduit pas d'une lecture sur la règle.

A2. Prouver la longueur obtenue

Le point A appartient au cercle de diamètre $[BC]$ et est distinct de ses extrémités. La propriété du cercle donne donc $\widehat{BAC} = 90^\circ$: ABC est rectangle en A .

Par construction, $H \in [BC]$ et $(AH) \perp (BC)$: $[AH]$ est la hauteur issue de l'angle droit. Les hypothèses de la relation démontrée en 7.8 sont réunies :

$$AH^2 = BH \times HC = 2 \times 3 = 6 \text{ cm}^2.$$

Puisque $AH > 0$, on obtient $AH = \sqrt{6} \text{ cm}$. Enfin, $2^2 = 4 < 6 < 9 = 3^2$, donc $2 < \sqrt{6} < 3$. Cet encadrement confirme l'ordre de grandeur de la figure, sans remplacer la preuve.

A3. Distinguer la construction de sa mesure

On calcule $2,45^2 = 6,0025 \neq 6$. Le nombre 2,45 ne peut donc pas être la valeur exacte de AH ; il en est une approximation.

La preuve est la chaîne « point sur le cercle de diamètre $[BC]$; triangle rectangle ; hauteur issue de l'angle droit ; relation $AH^2 = BH \times HC$ ». Ce sont les propriétés assurées par la construction qui déterminent la longueur exacte. Une graduation donne seulement un contrôle approché.

B1. Faire fonctionner la construction pour deux longueurs positives

Avec $BH = p$ cm et $HC = q$ cm, on trace un diamètre de longueur $(p+q)$ cm et un demi-cercle de rayon $(p+q)/2$ cm. Les nombres p et q étant strictement positifs, H est strictement entre B et C ; la perpendiculaire en H rencontre bien l'arc supérieur en un point A .

Le triangle ABC est rectangle en A , et $[AH]$ est sa hauteur sur l'hypoténuse. Si h désigne la mesure de AH en centimètres, la même relation donne

$$h^2 = pq \quad \text{et donc} \quad AH = \sqrt{pq} \text{ cm.}$$

On a repris les hypothèses du théorème pour des p, q quelconques, et non extrapolé à partir du seul essai (2;3). Le produit commande la hauteur ; la somme commande le diamètre.

B2. Une même hauteur n'impose pas des triangles semblables

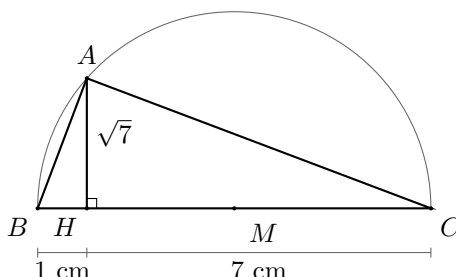
Pour $p = 1$ et $q = 6$, le diamètre vaut 7 cm, le rayon 3,5 cm et $h^2 = 1 \times 6 = 6$. On construit donc encore une hauteur de longueur $\sqrt{6}$ cm.

Supposons les deux grands triangles semblables. Comme ils sont rectangles, leurs hypoténuses, qui sont les plus grands côtés, se correspondent. Le rapport du triangle de diamètre 5 vers celui de diamètre 7 serait donc $k = 7/5$. La hauteur issue de l'angle droit serait elle aussi multipliée par $7/5$; elle mesurerait $(7/5)\sqrt{6}$ cm. Or elle mesure toujours $\sqrt{6}$ cm et $\sqrt{6} > 0$: c'est incompatible avec $7/5 \neq 1$.

Les triangles ne sont donc pas semblables. Deux constructions différentes peuvent produire une même longueur utile sans conserver toutes les proportions de leurs figures.

C1. Concevoir une construction de $\sqrt{7}$

On veut $pq = 7$. Un choix simple est $p = 1$ et $q = 7$. On trace donc $BC = 8$ cm, on place H à 1 cm de B , puis on trace le demi-cercle de centre M , milieu de $[BC]$, et de rayon 4 cm. La perpendiculaire en H rencontre l'arc en A :



Les conditions de B1 sont vérifiées : $1 > 0$, $7 > 0$, H intérieur au diamètre. Ainsi $AH^2 = 1 \times 7 = 7 \text{ cm}^2$, donc $AH = \sqrt{7}$ cm. Un autre choix positif de produit 7 conviendrait aussi ; l'énoncé ne demandait pas de tous les décrire.

C2. Prouver un maximum et montrer qu'il est atteint

Le diamètre mesure 10 cm : le rayon AM vaut toujours 5 cm. Si $H = M$, la hauteur est précisément le rayon vertical ; elle mesure $AH = 5$ cm. Ce choix est autorisé : $BH = HC = 5$ cm sont strictement positifs.

Si $H \neq M$, les points H, M sont sur (BC) et $(AH) \perp (BC)$. Le triangle AHM est donc rectangle en H . Pythagore donne

$$AH^2 + HM^2 = AM^2 = 25 \text{ cm}^2.$$

Comme $HM > 0$, on a $HM^2 > 0$, donc $AH^2 < 25 \text{ cm}^2$ et $AH < 5$ cm. Aucune autre position ne peut atteindre ou dépasser 5 cm.

$$AH_{\max} = 5 \text{ cm,} \quad \text{uniquement pour } H = M.$$

On a prouvé les deux points nécessaires à un maximum : 5 cm est réalisable, et toute autre hauteur est strictement plus petite. À somme $p + q = 10$ fixée, la construction rend ainsi visible pourquoi le produit pq est maximal pour $p = q = 5$.

7.9. Défi : Pythagore par le cercle

★★★★

- a) $[BE]$ et $[BC]$ sont deux rayons du cercle de centre B passant par C : $BE = BC = a$, et de même $BD = a$. On est sûr que $c < a$ car, dans le triangle ABC rectangle en A , $[BC]$ est l'hypoténuse, donc le plus grand côté. Ainsi A (à la distance c de B) est à l'intérieur du cercle, et :

$$AE = BE - BA = a - c \quad \text{et} \quad AD = DB + BA = a + c.$$

- b) Les points D et E appartiennent au cercle et sont alignés avec son centre B : $[DE]$ est un diamètre. Le point C appartient aussi au cercle. Or, si un triangle est inscrit dans un cercle dont un côté est un diamètre, alors il est rectangle. Donc le triangle DEC est rectangle en C (l'angle droit fait face au diamètre). ■

- c) Les triangles CAE et DAC sont tous deux rectangles en A : $(CA) \perp (AB)$, et les points D, B, A, E sont alignés sur (AB) . Dans le triangle DEC rectangle en C , on a $\widehat{CDE} + \widehat{CED} = 90^\circ$. Dans le triangle DAC rectangle en A , on a $\widehat{CDA} + \widehat{DCA} = 90^\circ$. Comme $\widehat{CDE} = \widehat{CDA}$ (c'est le même angle : A est sur le segment $[DE]$), on en déduit $\widehat{CED} = \widehat{DCA}$. Or $A \in [DE]$, donc $\widehat{AEC} = \widehat{CED} = \widehat{DCA}$. Les triangles CAE et DAC ont donc deux angles deux à deux de même mesure (90° en A , et $\widehat{AEC} = \widehat{DCA}$) : ils sont semblables, avec $C \leftrightarrow D$, $A \leftrightarrow A$, $E \leftrightarrow C$. D'où, en écrivant les rapports des côtés homologues :

$$\frac{AE}{AC} = \frac{CA}{DA}, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \frac{a-c}{b} = \frac{b}{a+c}.$$

L'égalité des produits en croix donne $(a-c)(a+c) = b^2$. En développant $(a-c)(a+c) = a^2 + ac - ca - c^2 = a^2 - c^2$, on obtient $a^2 - c^2 = b^2$, donc

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \blacksquare$$

À retenir. Cette preuve relie trois outils : les triangles semblables, le triangle inscrit dans un demi-cercle et l'égalité $(a-c)(a+c) = a^2 - c^2$.

7.10. Deux preuves de Pythagore : laquelle éclaire ?

★★★★



- a) Les quatre côtés de la région centrale sont les hypoténuses des quatre triangles : ils mesurent tous c . À chaque sommet, l'angle plat (180°) est partagé entre les deux angles aigus de deux triangles rectangles identiques (un de chaque mesure, donc complémentaires, de somme 90°) et l'angle de la région centrale, qui vaut donc $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$. Quatre côtés de même longueur et quatre angles droits : c'est un carré de côté c , d'aire c^2 .
- b) À droite, les quatre triangles sont regroupés deux par deux le long de leurs hypoténuses pour former deux rectangles de côtés a et b . Dans le grand carré de côté $a + b$, les deux régions blanches restantes ont quatre angles droits et des côtés de longueur $(a + b) - b = a$ pour l'une et $(a + b) - a = b$ pour l'autre : ce sont un carré de côté a (d'aire a^2) et un carré de côté b (d'aire b^2).
- c) Les deux figures partent du même grand carré de côté $a + b$ et contiennent les mêmes quatre triangles : l'aire blanche restante est donc la même des deux côtés. D'où

$$c^2 = a^2 + b^2. \quad \blacksquare$$

On peut aussi le lire comme un bilan d'aires : $(a + b)^2 = c^2 + 4 \times \frac{ab}{2}$, soit $a^2 + 2ab + b^2 = c^2 + 2ab$, d'où $a^2 + b^2 = c^2$.

- d) En découpant et en déplaçant les quatre triangles, on vérifie « avec les mains » que l'aire blanche restante ne change pas.
- e) Les deux démonstrations sont justes. La preuve-puzzle convainc vite et fait voir pourquoi (on regarde la même aire se réorganiser) ; la preuve par les triangles semblables (exercice 7.8) convainc aussi et, en prime, se généralise : elle fournit au passage les relations d'Euclide et de la hauteur. « Élégant » n'est pas « correct » : c'est un jugement en plus.

À retenir. Les deux preuves sont correctes ; leur intérêt peut différer. Le découpage rend visible une égalité d'aires ; la similitude fournit aussi des relations sur la hauteur et les côtés.

Fin du corrigé. Les encadrés  proposent des rédactions justifiées. Les exercices H et les enrichissements restent facultatifs.